

L'ÉDIFICE GÉOMÉTRIQUE ET LA DÉMONSTRATION

Autor(en): **Boutroux, Pierre**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1913)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14863>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'ÉDIFICE GÉOMÉTRIQUE ET LA DÉMONSTRATION ¹

1. — Pour un entendement parfait et dont la puissance de compréhension serait infinie, la science ne se déroulerait pas, comme pour nous, en une longue file de théorèmes. Du point de vue de la raison, à qui le temps est indifférent, il n'est point vrai qu'une proposition en précède ou en justifie une autre ; toutes sont également primitives et évidentes par elles-mêmes. Mais la science humaine, imparfaite par nature, ne peut saisir que l'une après l'autre et au prix de longs et laborieux détours, les propriétés des figures géométriques² ; « on rapporte, écrit Proclus, que Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il n'y avait pas pour la géométrie de route plus courte que celle des *Eléments* ; il eut cette réponse : Il n'y a pas en géométrie de chemin fait pour les rois ».

Le chemin frayé par les géomètres grecs, quelque roturier qu'il soit, n'en est pas moins une des plus belles créations de l'humanité.

Les Grecs ont eu de bonne heure le goût de la dialectique. Fortifié par les sophistes, ce goût se répandit chez les géomètres de l'Académie, contemporains ou continuateurs de Platon. Les diverses formes de raisonnements mathématiques furent subtilement distinguées, classées, disséquées, et d'interminables discussions s'engagèrent sur des questions de méthode ou de terminologie.

2. Théorèmes et problèmes. — « Déjà³ parmi les anciens, dit Proclus, les uns, comme Speusippe et Amphinome, proposaient de tout appeler *théorème*, pensant que ce terme convient mieux que celui de problème aux sciences théorétiques (contemplatives) et surtout traitant de choses éternelles ; car, pour de telles choses, il n'y a pas de génération ; il n'y a donc pas de place pour le pro-

¹ Extrait d'un ouvrage intitulé « Introduction à l'Analyse mathématique », où M. Pierre BOUTROUX étudie les principes fondamentaux de la science des nombres, de l'analyse et de la géométrie en donnant une grande importance à leur enchaînement historique. La première partie, actuellement sous presse, paraîtra prochainement à la librairie Hermann & fils.

² P. TANNERY, *La géométrie grecque*, p. 69.

³ P. TANNERY, *loc. cit.*, p. 137. Speusippe, neveu de Platon. Amphinome n'est en tout cas pas antérieur à Aristote.

blème où il s'agit d'engendrer et de faire quelque chose comme si elle n'était pas auparavant : par exemple, construire un triangle équilatéral, décrire un carré sur une droite donnée... D'autres, au contraire, comme les mathématiciens de l'école de Ménechme, étaient d'avis de tout regarder comme des *problèmes*, tout en en distinguant deux formes : tantôt, en effet, il s'agit de fournir (*πορίσασθαι*) quelque chose de cherché, tantôt, au contraire, prenant quelque chose de déterminé, de voir ce que c'est, ou quelle en est la nature, ou ce qui lui arrive, ou quelle est sa relation à autre chose ». La discussion se poursuit pendant des siècles. Geminus (1^{er} siècle av. J.-C.), soutient que le théorème est plus général que le problème. Au contraire, « Carpos¹ le mécanicien, dans son *Traité astrologique*,... dit que le genre des problèmes précède dans l'ordre celui des théorèmes, car c'est par les premiers que l'on trouve les sujets auxquels se rapportent les propriétés à étudier. L'énoncé du problème est simple et n'a pas besoin d'une intelligence exercée : ... construire un triangle équilatéral, ou bien, étant donné deux droites, retrancher de la plus grande une égale à la moindre ; là, rien d'obscur, aucun besoin d'une attention minutieuse. L'énoncé du théorème est au contraire pénible, il réclame une grande exactitude et une critique savante, pour n'être ni trop étendu, ni insuffisant par rapport à la vérité ». Proclus défend, quant à lui, l'opinion de Geminus, et il conclut : « Il est donc frivole d'attaquer Geminus comme ayant dit que le théorème est plus parfait que le problème ; car si c'est d'après l'ordre que Carpos donne la prééminence aux problèmes, c'est d'après le degré de perfection que Geminus l'accorde aux théorèmes. »

3. — Ces discussions ne sont pas aussi oiseuses qu'elles paraissent au premier abord. Elles ont permis de dégager les caractères auxquels se reconnaît la légitimité d'une définition ou la rigueur d'une démonstration, et si l'analyse de ces caractères est superflue dans les premiers chapitres de la science, où nous sommes guidés par le bon sens, il n'en est pas de même dans la suite.

Ainsi, en analysant la signification des problèmes, nous apprenons que toute définition doit être complétée par une discussion (problème) établissant l'*existence* de la chose définie. Si, par exemple, je proposais d'appeler triangle birectangle un triangle dont deux angles sont droits, je donnerais une définition purement verbale et sans valeur : en effet le problème « construire un triangle dont deux angles sont droits » n'a pas de solution, puisque la somme des *trois angles* du triangle ne peut être supérieure à deux droits.

Dans l'étude des théorèmes également (propositions énonçant

¹ Fragment de PROCLUS, *apud.*, P. TANNERY, *loc. cit.*, p. 146.

les propriétés des figures géométriques) les problèmes jouent souvent un rôle capital. Supposons, par exemple, que nous énoncions le théorème suivant : *Tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit* ; cet énoncé ne sera satisfaisant que si, d'une part, il est exact en toutes circonstances et si d'autre part, il ne contient aucune restriction superflue¹ c'est-à-dire si la condition imposée à l'angle (d'être inscrit dans un demi-cercle) est bien une condition *nécessaire* de sa rectitude. Or, pour s'assurer qu'il en est bien ainsi, le procédé le plus sûr sera de résoudre le problème suivant : *inscrire dans un cercle de rayon donné quelconque un angle de grandeur donnée* ; on constatera alors que l'arc embrassé par l'angle inscrit est inférieur, supérieur, ou égal à un demi-cercle, suivant que cet angle est lui-même inférieur, supérieur ou égal à un angle droit ; et l'on conclura de là que le théorème donné plus haut est correctement énoncé.

4. Traitement d'un problème. — Ainsi l'étude complète d'une question de géométrie sera ramenée en général à l'étude d'un problème : étant *données* certaines figures, construire une nouvelle figure remplissant telles ou telles conditions déterminées. C'est ce que nous voyons nettement dans les *Eléments* d'Euclide.

Le traitement d'un problème comprend huit phases ou parties :

1° La *protase* (*πρότασις*) ou énoncé ;

2° L'*ecthèse* (*ἐκθέσις*) ou répétition de l'énoncé rapporté cette fois au tracé d'un schéma dont les différentes parties (points, droites, etc.) sont en général désignées par des lettres ;

3° L'*apagoge* (*ἀπαγωγή*), qui transforme le problème proposé en un autre problème plus simple : elle suppose, pour cela, le problème résolu et, en s'appuyant sur des propositions connues, elle montre que les conditions requises (pour la construction de la figure inconnue) seront sûrement satisfaites si telles autres conditions (plus simples) le sont ;

4° La *résolution* (*ἀνάλυσις*) est la confrontation des conditions requises avec celles qui sont données (avec les conditions auxquelles satisfont les *données*).

5° S'il y a équivalence entre ces conditions, le problème est résolu. Mais il se peut que l'équivalence ait lieu seulement lorsqu'on ajoute aux données quelques conditions restrictives supplémentaires. Nous reviendrons donc à la protase et la compléterons par le *diorisme* (*διορισμός*), énoncé des restrictions moyennant lesquelles le problème est possible ; cet énoncé formule des propriétés appartenant aux figures que l'on considère ; c'est donc un *théorème*.

Ces étapes franchies, il n'y a plus maintenant qu'à vérifier que,

¹ Je me garderai par exemple d'énoncer comme un théorème la proposition suivante : *La somme des angles d'un triangle rectangle est égale à deux angles droits*. En effet la conclusion énoncée est exacte lors même que le triangle n'est pas rectangle.

par l'intermédiaire de l'apagoge, on peut effectivement, à partir des figures *données* par la protase et le diorisme, construire la figure demandée. La vérification comprend les parties suivantes :

6° La *construction* (*κατασκευή*) qui complète l'ecthèse en traçant, ou du moins indiquant les diverses lignes qu'il est nécessaire de considérer pour faire la démonstration ;

7° La *démonstration proprement dite* (*ἀπόδειξις*), qui déduit de la construction la figure demandée ;

8° La *conclusion* (*συμπέρασμα*), qui affirme que cette figure satisfait bien aux conditions requises.

5. — Eclairons cette théorie par un exemple.

Soit (*protase*) à construire un triangle isocèle étant *données* la longueur de la base et la grandeur d'un angle adjacent à la base.

Il s'agit, en d'autres termes (*ecthèse*), de construire un triangle isocèle ABC où le côté BC et l'angle B aient respectivement pour grandeurs celles d'un segment B'C' et d'un angle O donnés.

Apagoge : Si ABC est le triangle demandé, l'angle ABC est égal à l'angle ACB (puisque le triangle est isocèle) ; donc les angles B et C sont tous deux égaux à O, BC étant égal à B'C'.

Donc (*résolution*), si l'on peut construire un triangle satisfaisant aux conditions requises, ce triangle sera formé par une base BC et deux demi-droites BX, CY situées du même côté de BC et faisant chacune avec BC un angle égal à O.

Un tel triangle n'existe effectivement que si les droites BX et CY se coupent ; pour qu'il en soit ainsi il faut, manifestement, et il suffit (*diorisme*) que les angles égaux XBC et YCB soient aigus. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant : *Dans un triangle isocèle, les angles adjacents à la base sont aigus.*

Cela posé, nous pouvons construire le triangle ABC. Prenons (*construction*) un segment BC égal à B'C', et, à partir des points B et C menons, d'un même côté de BC, des droites BX et CY faisant avec BC des angles égaux à l'angle aigu O. Ces droites (*démonstration*) se coupent, et forment par conséquent, avec BC, un triangle ABC.

Ce triangle satisfait bien aux conditions requises (*conclusion*).

6. **Analyse et synthèse.** — Parmi les phases du raisonnement énumérées ci-dessus, la troisième et la quatrième (*ἀπαγωγή* et *ἀνάλυσις*) constituent l'*analyse*, la sixième et la septième (*κατασκευή* et *ἀπόδειξις*) constituent la *synthèse*. Il se peut que la synthèse ne fasse que répéter l'analyse en renversant l'ordre de l'exposition. En ce cas on a le droit (sans diminuer en rien la rigueur de la déduction) de se borner, soit à l'analyse, soit à la synthèse. Il se peut, au contraire, qu'analyse et synthèse soient toutes deux nécessaires, l'analyse donnant des solutions qui satisferaient aux conditions requises *si elles existaient*, mais qui peut-être n'existent pas, la synthèse, d'autre part, fournissant des solutions

toujours possibles, ne donnant peut-être pas toutes celles que comporte le problème ¹.

Un raisonnement qui se réduit à l'analyse ou à la synthèse est appelé *raisonnement analytique* ou *raisonnement synthétique*. Le raisonnement *analytique* part du résultat à démontrer (c'est-à-dire suppose le problème résolu); le raisonnement *synthétique* (qui est la *démonstration* sous sa forme normale) part, au contraire, des données, pour aboutir au résultat requis.

7. — Ainsi, parmi les huit parties dont se compose un raisonnement complet, toutes ne sont pas toujours explicitement formulées. La marche du raisonnement varie suivant la nature des problèmes et des théorèmes (la démonstration d'un théorème comprenant d'ordinaire moins de parties que la solution d'un problème). D'ailleurs l'apagoge et la construction se présentent, suivant les cas, sous des aspects très divers. D'où un grand nombre de types de déductions que le logicien s'applique à définir. C'est ainsi que Viète distingue entre l'*analyse zététique* qui fournit la solution d'un problème et l'*analyse poristique* qui fournit, non pas la solution, mais la démonstration d'une solution. Il y a lieu également de distinguer entre l'analyse directe et l'analyse indirecte telle que la pratique la *démonstration par l'absurde* : au lieu de supposer le problème résolu, imaginons au contraire que les conditions requises par l'énoncé ne soient pas remplies ; si nous déduisons de cette hypothèse (par une apagoge) des conséquences absurdes (contradictoires entre elles), nous en concluons que l'hypothèse est illégitime et que, par conséquent, les conditions requises sont sûrement remplies.

Mais nous ne pouvons prétendre approfondir ici l'étude logique de la démonstration. Il importe davantage de nous demander comment, par le moyen des démonstrations, nous pourrions dresser l'édifice de la géométrie rationnelle.

8. **Les éléments.** — « Le terme d'éléments (*στοιχεῖα*), dit Paul Tannery d'après Proclus, s'applique proprement à ces théorèmes qui, dans toute la géométrie, sont primordiaux et principes de conséquences, qui s'appliquent partout, et fournissent les démonstrations de relations en grand nombre ; on peut comparer leur rôle à celui des lettres (également appelées *στοιχεῖα*) dans le langage. »

De nombreux *Eléments* ont été composés en Grèce (ceux d'Hippocrate de Chios, aujourd'hui perdus, furent célèbres) : cependant nous n'en connaissons point de plus anciens que ceux d'Euclide, qui sont demeurés jusqu'à notre époque le modèle du genre.

Les *Eléments* d'Euclide jouent en même temps le rôle de fin et

¹ On sait, qu'en effet, un problème peut admettre plusieurs solutions différentes. Soit par exemple à construire un triangle dont on connaît deux côtés et un angle (non compris entre ces côtés) : ce problème a deux solutions.

le rôle de moyen : fin, puisqu'ils sont destinés à faire connaître les théorèmes essentiels de la géométrie ; moyen, puisque les solutions toutes préparées qu'ils nous offrent sont les instruments dont on a besoin pour effectuer l'apagoge (ou l'*ἀπόδειξις*) des problèmes nouveaux. Euclide adjoignit d'ailleurs aux *Eléments*, un second ouvrage, les *Data*, qui a pour objet direct de fournir des instruments à l'analyse et à la synthèse : « les propositions, dit Zeuthen¹, y ont pour but de prouver que, certaines quantités ou portions d'une figure étant *données*, certaines autres le sont aussi, c'est-à-dire qu'elles se déterminent à l'aide des premières. »

9. — Comment sont composés les *Eléments* ? Partant de définitions et d'hypothèses, le géomètre en déduit progressivement, conformément aux règles de la logique, une série de propositions, rigoureusement enchaînées les unes aux autres.

Les *définitions* (*ὄροι*) déterminent les concepts qui sont à la base de la science.

Les hypothèses sont², soit des *postulats* ou *demandes* (*αἰτήματα*), soit des *notions communes* ou *axiomes* (*κοινὰ ἔννοια, ἀξιώματα*) ; les postulats affirment (sans démonstration) que certaines constructions premières sont possibles ; les axiomes, que certaines propriétés essentielles appartiennent aux grandeurs ou aux figures les plus simples.

Il est clair — puisqu'aussi bien l'ordre logique n'est qu'un ordre introduit *après coup* pour exposer des vérités simultanées — que le choix des définitions, postulats et axiomes reste à notre discrétion. Entre plusieurs constructions ou propositions qui s'impliquent mutuellement, nous avons le droit de choisir celles que nous prendrons comme point de départ et renoncerons à démontrer, et celles qu'au contraire nous considérerons comme déduites. C'est pourquoi les savants modernes ont pu changer les bases de la géométrie euclidienne tout en continuant à la prendre pour modèle. Ce qui importe, du point de vue de la logique, c'est l'enchaînement des propositions. Or à cet égard il n'y a rien à ajouter aux règles posées par Euclide.

10. — Les propositions (*théorèmes*) sont rangées dans l'ordre suivant lequel elles se déduisent les unes des autres. Elles portent des numéros³ afin qu'il soit facile d'y renvoyer quand on les invoque dans la démonstration des propositions ultérieures.

Les propositions d'importance secondaire sont souvent appe-

¹ ZEUTHEN, *Hist. des mathématiques dans l'antiqu.*, trad. J. MASCART, pp. 87-88.

² La distinction que les Grecs établissaient entre les postulats et les axiomes n'a pas été maintenue par les modernes.

³ L'usage s'est répandu aujourd'hui de désigner les propositions par les noms de leurs inventeurs (théorèmes de PYTHAGORE, théorème de DESARGUES, etc.). Beaucoup de ces appellations sont cependant discutables au point de vue historique et il n'y faut voir qu'un substitut des numéros d'ordre.

lées¹ *lemmes* lorsqu'elles sont destinées à faciliter la démonstration d'un théorème à venir, *corollaires* lorsqu'elles expriment des conséquences directes d'un théorème que l'on vient d'établir.

La démonstration des propositions se fait suivant les règles que nous avons indiquées plus haut.

44. — Le système de géométrie que nous ont laissé les Alexandrins a traversé vingt-deux siècles sans être, pour ainsi dire, ébranlé. Couronnement de l'œuvre minutieuse poursuivie pendant trois cents ans par les dialecticiens grecs, il n'est pas loin d'atteindre la perfection. De la nécessité où est l'homme d'exposer l'une après l'autre les vérités géométriques au lieu de les embrasser toutes, du même coup d'œil, il a tiré le principe d'une méthode de découverte et de déduction qui est l'une des plus précieuses possessions de l'esprit humain.

Cependant, si les « *Eléments* » ont conservé moyennant quelques retouches² toute leur valeur logique, ils ne jouent plus, dans l'ensemble de la science mathématique, le rôle unique qui paraissait jadis leur être assuré. Sans doute, le système euclidien — dont la marche a été réglée si sûrement — est susceptible d'une extension continue et indéfinie. Ce n'est point, toutefois, en le prolongeant que la science a le plus progressé ; la raison en tient à une faiblesse du système qui ne s'est fait sentir qu'à la longue, mais que nous pouvons dès maintenant apercevoir.

Nous avons dit que les *Eléments* sont en même temps une fin poursuivie pour elle-même et un instrument de démonstration. Il y a certes une grande élégance à satisfaire du même coup deux besoins différents : mais est-on bien sûr d'y réussir ? La géométrie, en tant que fin, est l'héritière de la science pythagoricienne : elle note les plus belles propriétés (les plus simples, les plus suggestives) des figures les plus parfaites. Sont-ce bien ces mêmes propriétés qui rendront le plus de services pour l'analyse et pour la synthèse ? Il serait surprenant qu'il en fût toujours ainsi. L'admirable unité que les Grecs avaient donnée à la science n'a donc pas pu être sauvegardée³. Pour passer des données d'un problème à la solution, il faut souvent recourir à des intermédiaires qui ne sont point dignes d'occuper eux-mêmes une place dans l'édifice de la science : constructions artificielles, inharmonieuses, dépareillées, qui souvent même sont choquantes pour la raison et lui

¹ Ces distinctions ont été systématiquement introduites par les commentateurs d'EUCLIDE.

² Sur le système euclidien, comparé aux systèmes logiques de géométrie récemment constitués, voir les développements ultérieurs de l'ouvrage ; on lira aussi avec intérêt KLEIN, *Elementar math. v. höher. Standp. aus*, II, 1909, p. 38 et suiv.

³ Il est à remarquer — nous reviendrons sur ce point lorsque nous étudierons la géométrie algébrique — que, quelque savamment qu'elle ait été décomposée et codifiée, la méthode de résolution des problèmes employée par les géomètres anciens est extrêmement difficile à manier. Elle exige que l'on prenne des voies détournées où l'on ne peut s'orienter qu'à force d'ingéniosité.

paraissent absurdes au premier abord. C'est ainsi qu'à côté de la science contemplative, une technique a dû se développer, dont le but est strictement utilitaire et qui vise seulement à accroître, par tous les moyens possibles, la puissance de la démonstration. A ne vouloir jamais descendre des cimes splendides qu'elle prétend explorer, la science se condamnerait elle-même à l'impuissance.

Pierre BOUTROUX (Poitiers).

SUR LE PROLONGEMENT, PAR CONTINUITÉ,
DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

1. — Soient D_1 et D_2 deux domaines, simplement connexes, séparés par une ligne rectifiable L . Je suppose que les frontières C_1 et C_2 des domaines D_1 et D_2 sont aussi des lignes rectifiables.

Cela étant posé, supposons que dans D_1 se trouve définie une fonction holomorphe $f_1(z)$ prenant sur L une suite continue de valeurs ; supposons, de même, que dans D_2 se trouve définie une fonction holomorphe $f_2(z)$ prenant sur le L la même suite continue de valeurs que $f_1(z)$.

2. — M. Painlevé a démontré (dans sa Thèse : *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, page 27) que la fonction $f(z)$ définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) && \text{dans le domaine } D_1 ; \\ f(z) &= f_2(z) && \text{dans le domaine } D_2 ; \\ f(z) &= f_1(z) = f_2(z) && \text{sur la ligne } L ; \end{aligned}$$

est holomorphe dans le domaine D , obtenu en supprimant la ligne L .

En d'autres termes : deux fonctions holomorphes, définies dans deux domaines contigus, et se raccordant (les fonctions) par continuité le long de la frontière commune (ligne rectifiable) se prolongent mutuellement et ne forment, dans le *domaine-somme* (obtenu en supprimant la frontière commune) qu'une seule et même fonction holomorphe.

3. — La démonstration de M. Painlevé est basée sur l'intégrale de Cauchy. Je vais donner une autre démonstration¹ basée sur une transformation de la définition des fonctions holomorphes.

¹ T. LEVI-CIVITA, *Sulla continuazione analitica* [Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova, vol. XXVIII, Dispensa I (1912), pp. 3-5].