

DÉMONSTRATION NOUVELLE ET EXTENSION D'UN THÉORÈME DE M. G. KÖENIGS

Autor(en): **Godeaux, Lucien**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1913)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14866>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Si, notamment, l'une des sommes $a + b$, $a' + b'$ ou $a'' + b''$ était nulle, l'axe $C\omega$, $C'\omega'$ ou $C''\omega''$ correspondant serait avec la valeur $\lambda = 1$, rejeté à l'infini. En choisissant pour λ une valeur quelconque ne rendant nulle aucune des quantités $\lambda a + b$, $\lambda a' + b'$, $\lambda a'' + b''$, on maintient, dans tous les cas, ces trois axes à distance finie.

M. D'OCAGNE (Paris).

DÉMONSTRATION NOUVELLE ET EXTENSION D'UN THÉORÈME DE M. G. KÆNIGS

Dans un mémoire publié en 1887¹, M. G. KÆNIGS a déterminé, par une méthode élégante, les surfaces de l'espace à trois dimensions contenant deux faisceaux de coniques.

Dans le travail actuel, j'expose une généralisation du théorème de M. Kœnigs, en ce sens que je détermine les surfaces algébriques de S_r contenant deux faisceaux de courbes rationnelles. La méthode que j'emploie est fondée sur la représentation plane des surfaces et est différente de celle de M. Kœnigs. Précisément, j'établis le théorème suivant :

I. — *Si une surface algébrique de S_r possède deux faisceaux de courbes rationnelles, cette surface est rationnelle et peut être représentée sur le plan de manière qu'aux courbes d'un faisceau correspondent les droites d'un faisceau et qu'aux courbes de l'autre faisceau correspondent des courbes rationnelles d'un certain ordre μ , le plus petit possible, passant $\mu - \nu$ fois par le sommet du faisceau de droites (ν étant le nombre de points communs aux courbes des faisceaux) et telles que leurs multiplicités en deux points-bases, divers du sommet du faisceau de droites, n'aient jamais une somme excédant ν . De plus, il n'y a pas de points-bases ν -uples et il en peut exister qu'un seul point-base dont la multiplicité surpasse $\frac{\nu}{2}$ (en dehors du faisceau de droites). Les courbes représentant les sections hyperplanes de la surface ne passent jamais, par deux points-bases du faisceau de courbes d'ordre μ dont la somme des multiplicités est ν , avec des multiplicités dont la somme surpasse*

¹ Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques. Annales de l'Ecole Normale sup. 1888, 3^e s., t. V, p. 177. (Voir aussi C. R. 1887).

l'ordre d'une courbe rationnelle du faisceau correspondant au faisceau de droites.

Je considère, dans ce qui précède, une surface rationnelle comme complètement donnée lorsque l'on connaît une de ses représentations planes.

Comme cas particulier, je déduis le théorème de M. Kœnigs, que j'énonce comme ceci :

II. — *Si une surface algébrique contient deux faisceaux de coniques, cette surface est rationnelle et c'est ou la surface de Véronèse, de S_4 , ou la surface d'ordre huit, à sections hyperplanes elliptiques, représentant le système des quartiques planes à deux points doubles, ou l'une des projections de ces deux surfaces.*

Je déduis enfin ce théorème :

III. — *Si une surface algébrique contient un faisceau de coniques et un faisceau de cubiques rationnelles, elle est rationnelle et c'est une surface d'ordre 12, de S_{11} , à sections hyperplanes de genre deux, ou une surface d'ordre 11, de S_{10} , à sections de genre deux, ou une surface d'ordre 8, de S_8 , à sections elliptiques (représentant le système des courbes planes du troisième ordre ayant un point-base), ou une règle cubique de S_4 , ou une quadrique, ou une projection de l'une de ces surfaces.*

1. — Soit F une surface algébrique d'ordre n , située dans un espace linéaire S_r , à r dimensions et contenant deux faisceaux de courbes rationnelles. Dénotons par C_1 la courbe générique de l'un des faisceaux, par C_2 la courbe générique de l'autre. Soient n_1, n_2 les ordres respectifs des courbes C_1, C_2 , ν le nombre de points (≥ 1) communs à une C_1 et à une C_2 quelconque.

Les groupes de points d'intersection des courbes C_1 avec une C_2 déterminée (mais choisie d'ailleurs arbitrairement) forment une involution γ' sur cette courbe. Or, cette courbe C_2 étant rationnelle, il en est de même de l'involution d'après le théorème bien connu de Lüroth, et par suite du faisceau des C_1 .

Le faisceau rationnel des C_1 sera désigné, suivant l'usage, par $|C_1|$. On démontre de même que les C_2 forment un faisceau rationnel (C_2).

Mais, par un théorème de M. Nöther, une surface algébrique possédant un faisceau rationnel de courbes rationnelles, est rationnelle ; donc *la surface F est rationnelle.*

Nous désignerons par $|C|$ le système des sections planes ou hyperplanes de la surface F et nous supposerons que cette surface est normale, c'est-à-dire qu'elle n'est la projection d'aucune surface du même ordre n appartenant à un espace linéaire à plus de r dimensions.

2. — Considérons une représentation plane de la surface, c'est-à-dire établissons une correspondance birationnelle entre la surface F et un plan quelconque. Soient $|C^*|$ le système linéaire,

simple, de dimension ν , représentant le système des sections hyperplanes $|C|$, $|C^*_1|$ le faisceau de courbes rationnelles correspondant aux C_1 , $|C^*_2|$ le faisceau des courbes rationnelles correspondant aux C_2 .

Mais nous avons une infinité de représentations planes d'une surface, car on sait qu'on aurait pu prendre au lieu de $|C^*|$ un système linéaire transformé de $|C^*|$ au moyen d'une transformation birationnelle quelconque. Nous pouvons profiter de cette indétermination pour choisir un système $|C^*|$ plus commode que les autres. Précisément, nous choisirons le système $|C^*|$ de manière que :

1° Les courbes C^*_1 soient les droites d'un faisceau de sommet P.

2° Les courbes C^*_2 aient l'ordre minimum μ .

3° Les courbes C^* aient l'ordre minimum m (m n'étant naturellement choisi que lorsque μ est fixé).

Il est toujours possible de satisfaire au 1°), car étant donné un faisceau de courbes rationnelles dans un plan, il existe toujours une transformation birationnelle qui le change en un faisceau de droites (cela résulte d'ailleurs du théorème de M. Nöther précédemment invoqué). Si donc nous avons affaire à une représentation plane de F dans laquelle les C^*_1 ne seraient pas des droites, il serait possible de trouver une transformation birationnelle (et par conséquent une autre représentation plane de F) changeant les C^*_1 en des droites.

3. — Les courbes C^*_2 rencontrent une courbe C^*_1 en ν points, donc on a $\mu \geq \nu$ et le point P est $(\mu - \nu)$ -uple pour toutes les courbes C^*_2 .

De même, le point P est $(m - n_1)$ -uple pour les courbes C^* .

Désignons par x_{ik} le nombre des points fixes du plan, en dehors de P, i -uples pour les C^*_2 et k -uples pour les C^* ($i = 0, 1, 2, \dots, \nu$; $k = 0, 1, 2, \dots, n_1$).

Exprimons que les courbes C^*_2 sont rationnelles, on a

$$(\mu - 1)(\mu - 2) = (\mu - \nu)(\mu - \nu - 1) + \sum_k \sum_i i(i - 1)x_{ik}.$$

De plus, deux courbes C^*_2 n'ont aucun point variable en commun, donc on a

$$\mu^2 = (\mu - \nu)^2 + \sum_k \sum_i i^2 x_{ik}.$$

Ces deux formules s'écrivent, après quelques réductions,

$$\sum_k \sum_i i x_{ik} = 2(\mu - 1) + \nu, \quad (1)$$

$$\sum_k \sum_i i^2 x_{ik} = 2\mu\nu - \nu^2. \quad (2)$$

Exprimons que deux courbes C^* ont n points variables communs. On a

$$m^2 = (m - n_1)^2 + \sum_i \sum_k k^2 x_{ik} + n. \quad (3)$$

Une courbe C^* rencontre une courbe C^*_2 en n_2 points, donc on a

$$m\mu = \sum_i \sum_k ik \cdot x_{ik} + (m - n_1)(\mu - \nu) + n_2. \quad (4)$$

4. — Le nombre μ , pour satisfaire à la seconde condition, doit être le plus petit possible, c'est-à-dire que l'on ne peut trouver une transformation birationnelle changeant les courbes C^*_2 en des courbes d'un degré moindre, tout en faisant correspondre des droites aux droites C^*_1 .

Dans ces conditions, on doit avoir $x_{\nu k} = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n_1$), sauf pour $\nu = 1$. En effet, supposons $x_{\nu k} > 0$, $\nu > 1$. Alors on ne peut avoir $x_{ik} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, \nu-1$), car les formules (1) et (2) donnent

$$\nu x_{\nu k} = 2(\mu - 1) + \nu, \quad \nu x_{\nu k} = 2\mu - \nu,$$

d'où $\nu = 1$. Il doit donc exister, en dehors de P et des points-bases ν -uples de $|C^*_2|$, quelques autres points-bases. Envisageons un point-base P_1 ν -uple et un point base P_2 , i -uple de $|C^*_2|$ ($i < \nu$). La transformation quadratique ayant pour points fondamentaux P, P_1, P_2 change les C^*_1 en des droites et les C^*_2 en des courbes d'ordre $2\mu - (\mu - \nu) - \nu - i = \mu - i < \mu$. Or, nous venons de voir que cela n'est pas possible si la représentation plane a été choisie de manière à satisfaire à la condition 2^o), donc sauf pour $\nu = 1$, on doit avoir $x_{\nu k} = 0$.

D'une manière générale, on ne peut avoir, en dehors du point P , un point-base P_1 i -uple et un point-base P_2 j -uple pour $|C^*_2|$, si $i + j > \nu$. En effet, si cela était possible, la transformation quadratique ayant pour points fondamentaux P, P_1, P_2 changerait les C^*_1 en des droites, et les C^*_2 en des courbes d'ordre $2\mu - (\mu - \nu) - i - j = \mu - (i + j - \nu) > \mu$, de sorte que la représentation plane ne pourrait satisfaire au 2^o).

De cette propriété, on conclut que l'on ne peut avoir $x_{ik} \geq 0$ que pour une seule valeur $i > \frac{\nu}{2}$, et qu'alors, on a précisément $x_{ik} = 1$.

Nous allons appliquer ces théorèmes à la détermination des faisceaux $|C^*_2|$ lorsque l'on a $\nu = 1, 2$ ou 3.

5. — $\nu = 1$. On a $i \leq \nu$ ou 1, donc $i = 0$ ou 1. Les équations (1) et (2) deviennent :

$$x_{1k} = 2\mu - 1 .$$

Or, si $x_{1k} > 0$, comme on a $\nu = 1 > \frac{\nu}{2} \frac{\nu}{1}$ ou $\frac{1}{2}$, on ne peut avoir que $x_{1k} = 1$, d'où $\mu = 1$. Les C^*_2 sont donc les droites d'un faisceau.

Cela était évident a priori, car si une surface algébrique possède deux faisceaux de courbes rationnelles unisécantes, on en obtient une représentation plane en rapportant projectivement ces faisceaux respectivement à deux faisceaux de droites d'un même plan.

6. — $\nu = 2$. On a $i \leq 1$, d'où

$$x_{1k} = 2\mu = 4\mu - 4 ,$$

c'est-à-dire $\mu = 2$. Les C^*_2 sont donc les coniques d'un faisceau.

7. — $\nu = 3$. On a $i \leq 2$ et si i peut être égal à 2, on a $x_{2k} = 1$.

Nous avons donc deux cas à considérer :

1° i ne peut prendre la valeur 2. Alors on a

$$x_{1k} = 2\mu + 1 = 6\mu - 9 ,$$

c'est-à-dire $4\mu = 10$, ce qui est impossible pour μ entier.

2° i peut prendre la valeur 2. Alors on a

$$2 + x_{1k} = 2\mu + 1 , \quad 4 + x_{1k} = 6\mu - 9 .$$

On en déduit $\mu = 3$, $x_{1k} = 5$.

Les C^*_2 sont donc des cubiques planes ayant un point double et cinq points simples en commun.

8. — Occupons-nous maintenant d'exprimer la condition 3°).

Les courbes C^* ne peuvent avoir, en deux points différents de P et dont les multiplicités pour les C^*_2 ont pour somme ν , des multiplicités dont la somme surpasse n_1 .

Il suffit, pour le prouver, de supposer qu'il puisse exister deux points P_1, P_2 respectivement multiples d'ordres $i, \nu - i$ pour les C^*_2 , multiples d'ordre k, k' ($k + k' > n_1$) pour les C^* .

Alors, une transformation quadratique dont les points fondamentaux sont P, P_1, P_2 change les C^*_1 en des droites, les C^*_2 en des courbes d'ordre $2\mu - (\mu - \nu) - i - (\nu - i) = \mu$, et les C^* en des courbes d'ordre $2m - (m - n_1) - k - k' = m(k + k' - n_1) < m$. La condition 3° ne serait donc pas remplie par $|C^*|$, ce qui est contre l'hypothèse.

Nous avons donc complètement démontré le premier théorème énoncé dans le préambule.

9. — THÉORÈME DE M. G. KÖENIGS. — Pour déterminer les surfaces F possédant deux faisceaux de coniques, nous devons faire $n_1 = n_2 = 2$, et, si l'on écarte le plan ($n = 1$) $\nu \leq 2$.

1^{er} cas. — $\nu = 1$. Nous avons vu qu'alors, $|C^*_2|$ est un faisceau de droites dont le sommet sera désigné par P' ($\mu = 1$).

Les équations (3) et (4) deviennent ($k \leq n_1$ ou 2) ;

$$m^2 = (m - 2)^2 + x_{11} + 4x_{12} + n ,$$

$$m = x_{11} + 2x_{12} + 2 .$$

$|C^*_2|$ n'ayant qu'un point-base, on a $x_{11} + x_{12} \leq 1$.

De ces trois équations, on déduit aisément les trois solutions :

a) $m = 2, x_{11} = x_{12} = 0$.

$|C^*|$ est le système des coniques du plan et F est par suite la surface de Véronèse dans S_5 .

b) $m = 3, x_{11} = 1, x_{12} = 0$.

$|C^*|$ est le système des cubiques planes ayant deux points bases simples et F est une surface d'ordre 7, de S_7 , à sections hyperplanes elliptiques.

c) $m = 4, x_{11} = 0, x_{12} = 1$.

$|C^*|$ est le système des quartiques elliptiques (deux points-bases doubles P, P') et F est une surface d'ordre 8 de S_8 à sections hyperplanes elliptiques. Remarquons que la surface du septième ordre (cas *b*) s'obtient comme projection d'un de ses points de cette surface du huitième ordre.

2^e cas. — $\nu = 2$. Alors, $|C^*_2|$ est un faisceau de coniques ($\mu = 2$). Nous désignerons par P_1, P_2, P_3, P_4 les quatre points-bases de ce faisceau.

D'après l'observation générale faite précédemment (n° 8), la somme des multiplicités des courbes C^* en deux des points P_1, P_2, P_3, P_4 , ne peut excéder $n_1 = 2$, les équations (3) et (4) deviennent :

$$m^2 = (m - 2)^2 + x_{11} + n , \quad (x_{11} \leq 4) ,$$

$$2m = x_{11} + 2 .$$

De la seconde, on déduit que x_{11} est pair. Si $x_{11} = 4$, on a $m = 3, n = 4$ et le système $|C^*|$ est celui des cubiques planes ayant cinq points simples P, P_1, P_2, P_3, P_4 . F est donc une surface d'ordre 4, à sections elliptiques, de S_4 .

Si $x_{11} = 2$, on a $m = 2, n = 2$ et F est une quadrique, $|C^*|$ étant le système des coniques passant par deux des points P_1, \dots, P_4 .

L'hypothèse $x_{11} = 0$ conduit à $m = 1$ et est inadmissible.

Ainsi se trouve démontré le théorème de M. G. Kœnigs.

10. — SURFACES AYANT UN FAISCEAU DE CONIQUES ET UN FAISCEAU DE CUBIQUES UNICURSALES. Nous poserons $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ et nous aurons à examiner les trois cas $\nu = 1, 2, 3$ (le dernier correspondant à des cubiques gauches).

1^{er} cas. — $\nu = 1$. — Comme nous l'avons vu tantôt, on a $\mu = 1$, et $|C^*_2|$ est un faisceau de droites de sommet P' . Les équations (3), (4), s'écrivent :

$$m^2 = (m - 3)^2 + k^2 + n, \quad m = k + 2,$$

en supposant P' k -uple pour les C^* . Or, on a $k \leq n_1$, c'est-à-dire $k \leq 3$.

Nous avons donc quatre hypothèses à faire :

a) $k = 3$, $m = 5$, $n = 12$.

$|C^*|$ est le système des quintiques ayant deux points-bases respectivement doubles et triples. Ces quintiques sont donc de genre deux et F est une surface du douzième ordre, à sections de genre deux, de S_{11} (car les quintiques planes sont ∞^{20} et l'imposition de points triples ou doubles équivaut respectivement à six ou trois conditions).

b) $k = 2$, $m = 4$, $n = 11$.

$|C^*|$ est le système des quartiques de genre deux ayant un point-base double et un point-base simple. F est donc une surface d'ordre 11, à sections de genre deux, de S_{10} .

c) $k = 1$, $m = 3$, $n = 8$.

$|C^*|$ est le système des cubiques planes avec un point-base P' et F est donc une surface d'ordre 8, à sections elliptiques, de S_8 .

d) $k = 0$, $m = 2$ (impossible).

2^e cas. — $\nu = 2$. Actuellement, $|C^*_2|$ est un faisceau de coniques dont les points-bases sont P_1, P_2, P_3, P_4 . ($\mu = 2$). On a $k \leq 3$ et par suite

$$x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 4.$$

Les équations (3) et (4) deviennent :

$$m^2 = (m - 3)^2 + x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} + n,$$

$$2m = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2.$$

La première de ces équations s'écrit, plus simplement,

$$x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} + n = 6m - 9.$$

Nous allons donner à x_{11}, x_{12}, x_{13} les différentes valeurs compatibles avec l'inégalité écrite ci-dessus et nous en déduirons les valeurs correspondantes de n et m . Nous formerons ainsi le ta-

bleau suivant, en remarquant que $x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13}$ et par suite $x_{11} + 3x_{13}$ doivent être pairs :

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	m	n
a)	4	0	0	3	5
b)	3	0	1	4	3
c)	2	2	0	4	5
d)	2	1	0	3	3
e)	2	0	2	5	+ 1
f)	1	0	3	6	- 1
g)	0	4	0	5	5
h)	0	3	0	4	3
i)	0	2	2	6	1
j)	0	2	0	3	1
k)	0	1	0	2	- 1
l)	0	0	4	7	- 3
m)	0	0	2	4	- 3
n)	0	0	0	1	- 3

Les cas a), b), c), d), g), h) sont évidemment les seuls à considérer.

Dans le cas a), $|C^*|$ est le système des cubiques planes ayant quatre points-bases simples P_1, P_2, P_3, P_4 et F est donc la surface d'ordre 5, de S_5 , à sections hyperplanes elliptiques.

Dans le cas b), $|C^*|$ est le système des quartiques rationnelles ayant un point-base triple P_1 et quatre points-bases simples P_2, P_3, P_4 . F est donc une réglée cubique de S_4 .

Dans le cas c), $|C^*|$ est le système des quartiques elliptiques ayant deux points-bases doubles P_1, P_2 et trois simples P_3, P_4 . F est une surface d'ordre 5 de S_5 , à sections hyperplanes elliptiques.

Dans le cas d), $|C^*|$ est le système des cubiques ayant trois points-bases, un double P_1 et deux simples P_3, P_4 . F est une réglée cubique de S_4 .

Dans le cas g), $|C^*|$ est le système de quintiques elliptiques ayant cinq points doubles. F est une surface d'ordre 5, de S_5 , à sections elliptiques.

Dans le cas h), $|C^*|$ est le système des quartiques rationnelles à trois points-bases doubles et un simple. F est une réglée cubique de S_4 .

3^e cas. — $\nu = 3$. Alors, nous savons que $|C^*_2|$ est un faisceau de cubiques planes ayant un point-base double P_1 et cinq points-bases simples P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 ($\mu = 3$).

D'après ce que nous avons vu au n° 8, la somme des multiplicités du point P_1 et de l'un des points P_2, \dots, P_6 pour $|C^*|$ est

au plus égale à trois. Soit k_i la multiplicité de P_i pour $\{C^*\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$).

On aura à faire quatre hypothèses :

α) $k_1 = 3$. Alors, $k_2 = \dots = k_6 = 0$. Les équations (3) et (4) deviennent

$$m^2 = (m - 3)^2 + 9 + n, \quad 3m = 6 + 2.$$

Cela est impossible en nombres entiers.

β) $k_1 = 2$. Alors $k_i \leq 1$ ($i = 2, 3, \dots, 6$). On pourra écrire, en appelant x_{11} le nombre des points P_2, \dots, P_6 simples pour les C^* ,

$$m^2 = (m - 3)^2 + 4 + x_{11} + n, \\ 3m = 4 + x_{11} + 2 = x_{11} + 6.$$

x_{11} doit être multiple de 3 et d'autre part, $x_{11} \leq 5$, donc on peut avoir :

a) $x_{11} = 3, m = 3, n = 2$.

F est alors un quadrique, $\{C^*\}$ étant le système des cubiques planes avec un point-base double et trois simples.

b) $x_{11} = 0, m = 2$, ce qui est impossible.

γ). $k_1 = 1$. Soit alors x_{11} le nombre des points P_2, \dots, P_6 simples pour les C^* , x_{12} celui de ces points doubles pour les C^* . On a

$$m^2 = (m - 3)^2 + 1 + x_{11} + 4x_{12} + n, \\ 3m = 2 + x_{11} + 2x_{12} + 2 = x_{11} + 2x_{12} + 4$$

Nous dressons un tableau analogue à celui de tantôt, mais en omettant d'écrire les cas à rejeter.

	x_{11}	x_{12}	m	n
a)	5	0	3	3

$\{C^*\}$ est le système des cubiques planes à six points-bases simples et F est donc une surface cubique générale de S_3 .

δ) $k_1 = 0$. Avec nos notations habituelles, nous aurons

$$n + x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} = 6m - 9, \\ 3m = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2.$$

On en déduit

$$n + 3x_{13} + 3 = x_{11}.$$

Or, $x_{11} \leq 5$, donc $n + 3x_{13} \leq 2$ et par conséquent $x_{13} = 0$, $n = 2$, $x_{11} = 5$, $x_{12} = 0$, $3m = 7$, ce qui est impossible. Donc l'hypothèse δ) est à rejeter.

Ainsi se trouve démontré notre théorème III énoncé au début de ce travail.

Janvier 1913.

Lucien G O D E A U X (Morlanwelz, Belgique).