

PRI LA FUNKCIA EKVACIO $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Autor(en): **Fréchet, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1913)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14871>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PRI LA FUNKCIA EKVACIO

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. — Jam de longe, Cauchy pruvis ke *kontinua* funkcio $f(x)$ kiu verigas la funkcia ekvacion

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

kiuj ajn estu la nombroj x, y , necese estas homogena, unuagrada funkcio $f(x) \equiv Ax$.

Poste, oni pruvis la saman teoremon, farinte hipotezojn pli largajn ol la kontinueco de $f(x)$ ¹. Ekzemple, S^{ro} Darboux nur supozis ke $f(x)$ havas superrandon sur finita segmento.

2. — Nun mi intencas *pruvi la saman teoremon, nur supozante ke $f(x)$ estas analitike esprimebla sur iu finita segmento*. Tio signifas, laŭ S^{ro} Lebesgue, ke ĝi povas esti konstruata per finita nombro aŭ komputebla aro da adicioj, multiplikoj, allimiradoj faritaj sinsekve laŭ difinita leĝo, komence per la varianto kaj konstantoj. Tiu nocio estas ĝeneralega².

Mi utilos la econ, montratan de S^{ro} Lebesgue³, ke ĉiu analitike esprimebla funkcio $f(x)$ estas « mezurebla », t.e. ke la punktoj kie $a \leq f(x) < b$, formas aron mezureblan kiuj ajn estu la nombroj a, b . Aliparte, aro E da punktoj sur (a, b) estas mezurebla, kiam $b - a$ estas la sumo de la malsuperrando (nomata mezuro de E) de la tuta longeco de aro de segmentoj entenantaj E , kaj de la simila nombro kiu koncernas la aron de la punktoj de (a, b) kiuj ne apartenas al E .

3. — Do, ni nur supozas nun ke $f(x)$ estas mezurebla funkcio sur (a, b) , kiu ĉie verigas la funkcia ekvacion

$$(1) \quad f(x) = f(x) + f(y) .$$

¹ Vidu ekzemple S. PINCHERLE, *Calcul fonctionnel*, Encyclopédie des Sciences mathématiques, éd. franç.

² Ekzemple, la funkcio kiu estas nula kiam la varianto estas racionala, kaj egalas unu alie, estas analitike esprimebla, egalante

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! x)^{2n} \right] .$$

³ H. LEBESGUE. *Sur les fonctions représentables analytiquement*. Journal de Mathématiques, 1908.

Oni tuj vidas, ke $f(0) = 0$, kaj, per klasika metodo ke

$$(2) \quad f(rx) = rf(x)$$

kiam r estas racionala nombro (> 0 , < 0 , $= 0$). Nun se $f(x)$ ne estas la evidenta solvo $f(x) \equiv 0$ de (1), ekzistas certe nombro $c \neq 0$, tia ke $f(c) \neq 0$. Oni do havas

$$f(x) = \frac{x}{c} f(c)$$

kiam $\frac{x}{c}$ estas racionala. Se ni skribas $X = \frac{x}{c}$, $A = \frac{f(c)}{c}$ la funkcio

$$F(X) = f(cX) - Xf(c) = f(x) - Ax$$

estas evidente funkcio mezurebla, kiu verigas la funkciajn ekvaciojn

$$F(X + Y) = F(X) + F(Y)$$

kiel $f(x)$, sed kiu estas nula kiam X estas racionala.

La teoremo estos pruvita kiam mi estos montrinta ke $F(X)$ estas ĉie nula.

4. — En kontraŭa okazo, kiam ekzistus nombro $X_0 \neq 0$, por kiu $F(X_0) \neq 0$, ni rimarkigos unue, ke en tre mallonga segmento, $F(X)$ alproksimiĝas al iu ajn nombro. Pli precize, estu k iu nombro, kaj estu ϵ, η du nombroj pozitivaj: ekzistas certe nombro X tia ke, ekzemple

$$(3) \quad 0 < X < \eta, \quad k - \epsilon < F(X) < k.$$

Fakte, ni povas elekti racionalan nombron r tiel ke

$$k - \epsilon < r \cdot F(X_0) < k.$$

Poste; ni povas elekti racionalan nombron r' , por kiu

$$(5) \quad -rX_0 < r' < -rX_0 + \eta.$$

Nun

$$F(r' + rX_0) = F(r') + F(rX_0) = rF(X_0).$$

Kaj sufiĉas preni $X = r' + rX_0$ por ricevi (3) ¹.

5. — Ni nun uzu la hipotezon ke $F(X)$ estas mezurebla en (a, b) . La aro $E_{\alpha, \beta}$ kie, en (a, b) , $\alpha \leq F(X) < \beta$ havas do mezuron, ni nomu ĝin $mE_{\alpha, \beta}$. Ni estas tuj montrante ke

$$(6) \quad E_{n, n+1} = E_{p, p+1},$$

kiuj ajn estu n, p .

¹ Samtempe la malegalecoj (3) pravas ke, se, laŭ la hipotezo de S^{ro} DARBOUX, $f(x)$ — mezurebla au ne — havas randojn finitajn, $F(X) \equiv 0$, do $f(x) \equiv Ax$.

Tio sufiĉos por pruvi la teoremon, ĉar, ĉiu punkto de (a, b) apartenas al unu el la aroj $E_{n, n+1}$ kie n estas entjero, kaj sekve

$$b - a = (mE_{0,1} + mE_{-1,0}) + (mE_{1,2} + mE_{-2,-1}) + \dots \\ + (mE_{n,n+1} + mE_{-n-1,-n}) + \dots$$

Sed, ĉar ĉiuj parentezoj estas egalaj, laŭ (6), la dekstra membro do, ne povus konverĝi al $(b - a)$.

6. — Por ricevi (6), ni rimarku, ke laŭ (3), kiu ajn estu la entjero $q > 0$, oni povas trovi X_q tiel ke

$$0 < X_q < \frac{1}{q}, \quad p - n - \frac{1}{q} < F(X_q) < p - n.$$

Kiam X_q ne sangâs, kaj, aliparte, X trakuras $E_{n, n+1}$, la punktoj $Y = X + X_q$ trakuras aron mezurableblan G sur kiu

$$a < Y < b + \frac{1}{q} \quad p - \frac{1}{q} < F(Y) < p + 1.$$

Ni nomu H, K , la aroj de la punktoj de G sur kiuj

$$a < Y < b; \quad b \leq Y \leq b + \frac{1}{q}.$$

La unua estas parto de la mezurablebla aro $E_{p-\frac{1}{q}, p+1}$, la dua estas parto de la segmento $(b, b + \frac{1}{q})$. Do

$$mE_{n, n+1} = mG \leq mE_{p-\frac{1}{q}, p+1} + \frac{1}{q}$$

aŭ

$$(7) \quad mE_{n, n+1} - mE_{p, p+1} \leq mE_{p-\frac{1}{q}, p} + \frac{1}{q}.$$

La nombroj n, p ne dependas de q . Kiam q kreskas senfine, la dua membro de (7) konverĝas ankaŭ al nulo¹. Do,

$$mE_{n, n+1} \leq mE_{p, p+1}.$$

¹ Ni skribis ke $E_{p-\frac{1}{q}, p}$ konverĝas al nulo kun $\frac{1}{q}$, ĉar $E_{p-\frac{1}{2}, p}$ estas sumo de

$$E_{p-\frac{1}{2}, p-\frac{1}{3}}, \quad E_{p-\frac{1}{3}, p-\frac{1}{4}}, \quad \dots \quad E_{p-\frac{1}{q}, p-\frac{1}{q+1}}, \quad \dots$$

do la rajo

$$mE_{p-\frac{1}{2}, p-\frac{1}{3}} + mE_{p-\frac{1}{3}, p-\frac{1}{4}} + \dots + mE_{p-\frac{1}{q}, p-\frac{1}{q+1}}, \dots$$

konverĝas kaj la resto $E_{p-\frac{1}{q}, p}$ de la rajo devas konverĝi al nulo kun $\frac{1}{q}$.

Same

$$mE_{p,p+1} \leq mE_{n,n+1}$$

fine

$$mE_{p,p+1} = mE_{n,n+1} .$$

7. — Mi jam alie pruvis¹, ke la kontinuaj funkcioj kiuj verigas la funkciaŭ ekvacion

$$(8) \quad f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}) - \sum_1 f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}) + \\ \sum_2 f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_{n-1}}) + \dots + (-1)^{n+1} f(0) = 0$$

estas n -gradaj polinomoj, — kaj reciproke². La pruvo starigis sur la teoremo de Cauchy pri la funkcia ekvacio (1). Oni nun vidas ke la teoremo, supre citita, koncerne (8), estos ankoraŭ vera kiam oni ne plu supozas ke $f(x)$ estas kontinua, sed ke ĝi estas mezurebla — aŭ analitike esprimebla — en iu segmento eĉ tre malgranda, aŭ ankaŭ, ke ĝi estas randebla en tiu-ĉi segmento.

M. FRÉCHET (Poitiers).

¹ Une définition fonctionnelle des Polynômes (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1909, 4^e série, t. IX).

² La skribsigno \sum_p signifas la sumon de ĉiuj $f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_p})$ kie i_1, i_2, \dots, i_p estas ia kombinaĵo el la nombroj $1, 2, \dots, n + 1$.