

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 15 (1913)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES POINTS D'INFLEXION DES COURBES  
DU 3<sup>e</sup> DEGRÉ ET DES TANGENTES DE REBROUSSEMENT DES  
COURBES DE LA 3<sup>e</sup> CLASSE

**Autor:** Crelier, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-14872>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES POINTS D'INFLEXION DES COURBES DU 3<sup>e</sup> DEGRÉ ET DES TANGENTES DE REBROUSSEMENT DES COURBES DE LA 3<sup>e</sup> CLASSE

## I. — Introduction.

Dans divers travaux parus précédemment<sup>1</sup>, nous avons établi les propriétés dualistiques suivantes des courbes du 3<sup>e</sup> degré et des courbes de la 3<sup>e</sup> classe, et la plupart des constructions originales que nous indiquons sont réalisables avec la règle et le compas :

1. Soient deux faisceaux  $F_1$  et  $F_2$  tels qu'à chaque rayon de  $F_1$  correspondent deux rayons de  $F_2$  et à chaque rayon de  $F_2$ , un seul de  $F_1$ , ces faisceaux forment un groupe ou une correspondance du  $(2 + 1)^e$  degré.

3. Le faisceau  $F_1$  est un faisceau simple et le faisceau  $F_2$  une involution. La correspondance du  $(2 + 1)^e$  degré se présente comme un faisceau simple homographique avec une involution de rayons.

5. Deux faisceaux concentriques formant une correspondance du  $(2 + 1)^e$  degré peuvent avoir 0 ou 2 rayons doubles simples ( $b_1$  et  $b_2$ ), puis 1 ou 3

2. Soient deux ponctuelles  $P_1$  et  $P_2$  telles qu'à chaque point de  $P_1$  correspondent deux points de  $P_2$  et à chaque point de  $P_2$  un seul de  $P_1$ , ces ponctuelles forment un groupe ou une correspondance de la  $(2 + 1)^e$  classe.

4.  $P_1$  est une ponctuelle simple et  $P_2$  une involution de points. La correspondance de la  $(2 + 1)^e$  classe se présente comme une ponctuelle simple homographique avec une involution de points.

6. Deux ponctuelles de même base formant une correspondance de la  $(2 + 1)^e$  classe peuvent avoir 0 ou 2 points doubles simples, ( $B_1$  et  $B_2$ ) puis 1 ou 3

<sup>1</sup> *Enseignement Mathématique*, tome 8, 1906, n<sup>o</sup> 6, p. 455-462 ; tome 9, 1907, n<sup>o</sup> 2, p. 107 à 119 ; tome 10, 1908, n<sup>o</sup> 2, p. 111 à 140.

rayons doubles conjugués ( $b$  et  $b_1$ ) et éventuellement 1 rayon triple ( $b_1$ ,  $b_2$  et  $b$ ).

Ils admettent en outre une paire de rayons rectangulaires simples : les axes de l'involution, puis 1 ou 3 paires de rayons rectangulaires conjugués.

7. Les faisceaux  $F_1$  et  $F_2$  d'une correspondance du  $(2 + 1)^e$  degré engendrent une courbe du  $3^e$  degré à point double. Le sommet  $S_2$  du faisceau  $F_2$  est le point double, tandis que le sommet  $S_1$  de l'autre faisceau  $F_1$  est un point simple de la courbe.

9. Quand les faisceaux considérés ont un rayon homologue commun, ils n'engendrent plus qu'une conique passant par  $S_2$ .

11. La courbe du  $3^e$  degré est construite au moyen d'une conique auxiliaire liée aux divisions des points prises sur deux rayons conjugués coupant les faisceaux.

Les tangentes de la courbe du  $3^e$  degré au point double sont les deux tangentes de la conique auxiliaire menée par ce point; la tangente de la cubique dans l'autre sommet  $S_1$  est aussi la deuxième tangente possible de la conique auxiliaire par  $S_1$ .

13. Suivant la position du sommet  $S_2$  par rapport à la conique auxiliaire, ce point double est un nœud, un rebroussement ou un point isolé.

15. Par tout point  $S_1$  de la courbe du  $3^e$ , on peut mener, d'une manière générale, une tangente en  $S_1$  et deux autres.

points doubles conjugués ( $B$  et  $B_1$ ) et éventuellement 1 point triple ( $B_1$ ,  $B_2$  et  $B$ ).

Comme points, limites, ces ponctuelles admettent  $M_1$  lié  $M_2$  à  $l'∞$  et conjugué de  $M$ , puis  $L_1$  et  $L_2$  conjugués de  $L$  à  $l'∞$ .

Le point  $M$  est le centre de l'involution de points.

8. Les ponctuelles  $P_1$  et  $P_2$  d'une correspondance de la  $(2 + 1)^e$  classe engendrent une courbe de la  $3^e$  classe avec une tangente double. La base  $P_2$  est tangente double, tandis que l'autre est tangente simple.

10. Quand les ponctuelles considérées ont un point homologue commun, elles n'engendrent plus qu'une conique tangente à  $P_2$ .

12. La courbe de la  $3^e$  classe est construite au moyen d'une conique auxiliaire liée aux faisceaux de rayons formés en deux points conjugués réunis avec l'ensemble des points des divisions.

Les points de tangence de la courbe avec la tangente double sont les points de coupe de la conique auxiliaire avec la base  $P_2$ ; le deuxième point de coupe de cette conique avec l'autre base est le point de tangence de cette base avec la courbe  $K$ .

14. Suivant la position de la base  $P_2$  par rapport à la conique, cette base est bi-tangente ordinaire, tangente de rebroussement ou tangente isolée.

16. Toute tangente simple  $P_1$  de la courbe considérée rencontre celle-ci dans son point de tangence et, d'une manière gé-

tangentes par  $S_1$  avec des points de tangence différents de  $S_1$ .

Si le point double est sur la conique auxiliaire on ne peut plus mener par  $S_1$  que la tangente en  $S_1$  et une autre tangente avec le point de tangence différent de  $S_1$ .

Dans le premier cas la courbe du 3<sup>e</sup> degré est de la 4<sup>e</sup> classe et dans le second cas, elle est de la 3<sup>e</sup> classe. (Voir *fig. 1.*)

17. En coupant les faisceaux  $F_1$  et  $F_2$  par une circonférence passant par les sommets, on peut former deux divisions circulaires du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré, et au moyen de deux points conjugués on détermine deux faisceaux du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré avec deux rayons homologues communs. La courbe résultante est une conique qui peut également servir de courbe auxiliaire pour la construction de la courbe du 3<sup>e</sup> degré.

Les tangentes en  $S_1$  et  $S_2$  sont les diverses droites conjuguées de la ligne  $\overline{S_1 S_2}$ .

19. Un faisceau de rayons simple, homographique avec un faisceau de tangentes d'une conique déterminent également une courbe du 3<sup>e</sup> degré à point double. Le point double est le sommet du faisceau simple.

Toute sécante des deux faisceaux contient une correspondance du  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> degré sur la même base. Les trois points doubles conjugués de cette correspondance sont les points de coupe de la sécante avec la courbe du 3<sup>e</sup> degré.

nérale, dans deux autres points de coupe distincts.

Quand la tangente double est une tangente de la conique auxiliaire la tangente simple  $P_1$  n'a plus qu'un point de coupe avec la courbe.

Dans le premier cas, la courbe de la 3<sup>e</sup> classe est du 4<sup>e</sup> degré et dans l'autre cas, c'est une courbe du 3<sup>e</sup> degré. (Voir *fig. 2.*)

18. Au moyen d'une circonférence tangente aux deux bases et de toutes les tangentes de celle-ci par les points des divisions, on peut former deux faisceaux de tangentes de la  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> classe sur la circonférence, puis avec deux tangentes conjuguées on déterminera deux nouvelles divisions de la  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> classe ayant deux points homologues communs. La courbe résultante sera une conique qui peut servir de conique auxiliaire dans la construction de la courbe de 3<sup>e</sup> classe. Les points de tangence de  $P_1$  et  $P_2$  seront les points conjugués du point de coupe des bases.

20. Une division de points simple, homographique avec une division de points sur une conique déterminent également une courbe de la 3<sup>e</sup> classe avec tangente double. La tangente double est la base de la division simple.

Tout faisceau formé en joignant les points des deux divisions à un point quelconque du plan donne une correspondance de la  $(2 + 1)$ <sup>e</sup> classe. Les trois rayons doubles conjugués de la correspondance sont les trois

21. La courbe du 3<sup>e</sup> degré peut être également établie en utilisant les propriétés involutives du faisceau  $F_2$ . On construit un nouveau faisceau simple  $F_3$ , déduit de l'involution et on utilise la conique auxiliaire des faisceaux simples homographiques  $F_1$  et  $F_3$ .

On construit les tangentes dans les sommets  $S_2$  et  $S_1$  avec les rayons conjugués de leur ligne de jonction.

23. Dans la construction qui précède on avait coupé le faisceau involutif par un cercle; la conique auxiliaire a quatre points de coupe avec ce cercle et ceux-ci sont également des points de la cubique à point double.

Si tout en conservant la même cubique nous laissons le sommet  $S_1$  se déplacer sur cette courbe, le sommet  $P$  du faisceau auxiliaire sera variable, mais les 4 points communs au cercle, à la cubique et à la conique précédente seront des points de chaque nouvelle conique auxiliaire. En outre la ligne de jonction des 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> points de coupe de chaque conique avec la cubique continuera de passer par le point de coupe de la tangente du cercle en  $S_2$  avec la cubique.

Ce point est le corésiduel des 4 premiers points communs aux diverses courbes.

Le faisceau des coniques auxiliaires est homographique avec le faisceau des rayons passant par le point corésiduel  $V$ . Le

tangentes de la courbe de 3<sup>e</sup> classe par le point quelconque.

22. La courbe de 3<sup>e</sup> classe peut encore être obtenue en utilisant les propriétés involutives de la base  $P_2$ . On établit une nouvelle ponctuelle  $p$  découlant de l'involution et on utilise la conique des ponctuelles homographiques  $P_1$  et  $p$  comme conique auxiliaire.

On construit les points de tangence des bases comme points conjugués de leur point de coupe.

24. Dans cette construction basée sur l'involution on avait considéré un cercle tangent de la base  $P_2$ ; la conique auxiliaire a quatre tangentes communes avec ce cercle et celles-ci sont également des tangentes de la courbe de 3<sup>e</sup> classe à tangente double.

Si, tout en conservant cette même courbe, nous laissons la tangente  $P_1$  se déplacer sur celle-ci, la base  $p$  de la ponctuelle auxiliaire sera variable, mais les 4 tangentes communes au cercle, à la courbe principale et à la conique précédente seront des tangentes communes de chaque nouvelle conique auxiliaire. D'autre part le point de coupe des 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> tangentes communes de chaque conique auxiliaire avec la courbe de 3<sup>e</sup> classe sera toujours sur la tangente de la courbe principale menée par le point de tangence  $m_2$  de  $P_2$  avec le cercle.

Cette droite  $mm_2$  est la corésiduelle des 4 tangentes communes primitives.

Les coniques auxiliaires for-

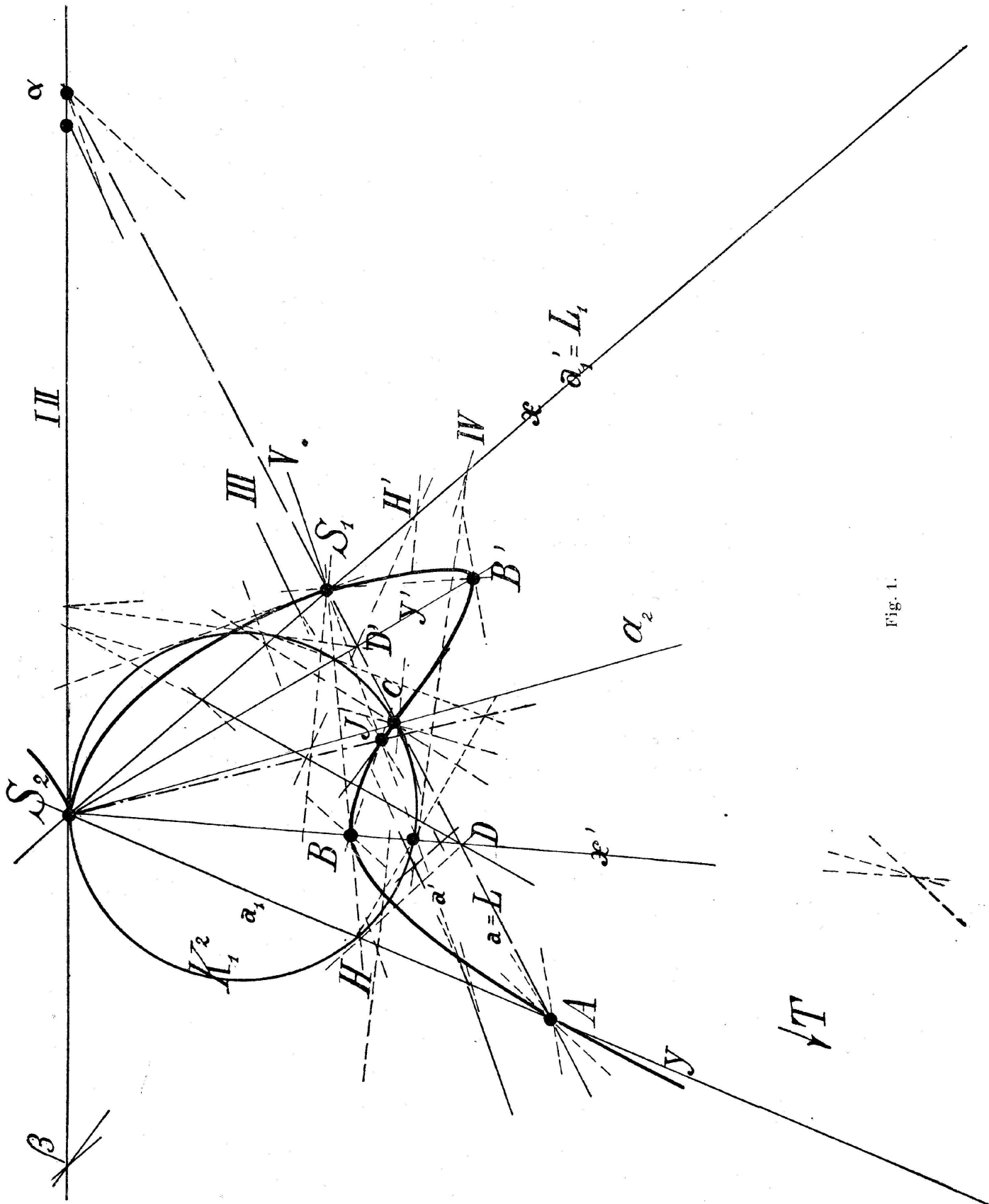


Fig. 1.

cercle est une des coniques ; il est conjugué avec sa tangente en  $S_2$ .

Le lieu des points  $P$  est la droite qui passe par les points de coupe des tangentes de la cubique en  $S_2$  avec le cercle.

Si  $S_1$  et  $\pi$  sont les 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> points de coupe de la 1<sup>re</sup> conique auxiliaire avec la cubique, on peut permuter ces points ; le point  $P$  sera alors le point de coupe de la même conique avec la droite  $\overline{S_1 S_2}$ . (Voir *fig. 3.*)

25. La recherche des asymptotes est liée à celle des rayons doubles dans un nouveau faisceau parallèle aux deux premiers. Les asymptotes sont les tangentes par les points de coupe à l' $\infty$  des rayons conjugués parallèles.

ment un faisceau homographique avec la division de points sur  $\overline{mm_2}$ . Le cercle est une de ces coniques ; le point homologue est  $m_2$ , son point de tangence avec  $P_2$ .

L'enveloppe des droites auxiliaires  $p$  est le point de coupe des tangentes du cercle par les points de tangence de la courbe principale avec  $P_2$ .

En permutant les 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> tangentes  $mm_1$  et  $P_2$ , la droite  $p$  sera la jonction du point fixe avec le point de coupe de  $P_1$  et  $P_2$ . (Voir *fig. 4.*)

26. La recherche des tangentes parallèles à une direction donnée est dualistique de celle des asymptotes dans les courbes du 3<sup>e</sup> degré.

## II. — Points d'inflexion et tangentes de rebroussement.

PREMIER CAS : *Les courbes sont du 3<sup>e</sup> degré et de la 3<sup>e</sup> classe.*

1. *Méthode des rayons conjugués.*  
(Voir *fig. 1.*)

Les sommets des faisceaux de la correspondance du  $(2 + 1)^e$  degré sont  $S_1$  et  $S_2$ . La courbe engendrée est  $C^3$ . Comme le point  $S_2$  doit être un point de rebroussement, la conique auxiliaire doit passer par  $S_2$  et sa tangente en ce point est la tangente de rebroussement de  $C^3$ .

La conique auxiliaire est déterminée par les ponctuelles homographiques sur les rayons conjugués  $a$  et  $a_1$  passant par  $A$  sur  $C^3$ . La conique s'appelle

2. *Méthode des points conjugués.*  
(Voir *fig. 2.*)

Les ponctuelles de la correspondance de  $(2 + 1)^e$  classe sont  $P_1$  et  $P_2$ . La courbe engendrée est  $K^3$ . La base  $P_2$  devant être une tangente d'inflexion, ses deux points de tangence  $E_1$  et  $E_2$  seront confondus en un seul et la conique auxiliaire  $C_1^2$  sera tangente de  $P_2$  en ce point.

Ce point est le point d'inflexion.

La conique  $C_1^2$  est déterminée par les faisceaux homographiques issus des points conjugués

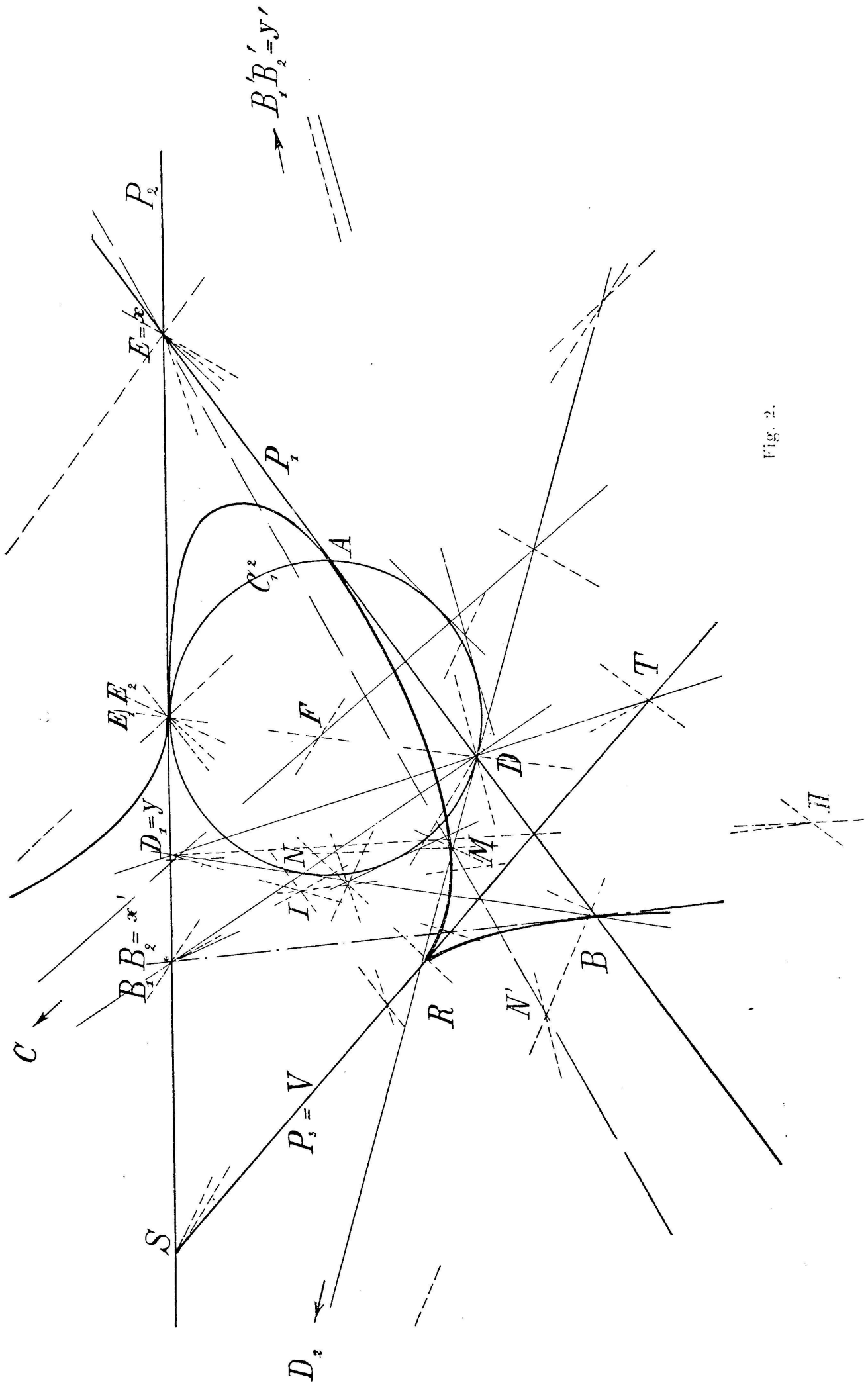


Fig. 2.



$K_1^2$ ;  $\overline{S_1A} = a$  est une tangente de  $K_1^2$  en C et C est le point de coupe des rayons conjugués  $a$  et  $a_2$ .

Par  $S_1$ , nous avons une tangente de  $C^3$  en  $S_1$  et une autre tangente de  $C^3$  en B. La première est également une tangente de  $K_1^2$  par  $S_1$ . La seconde est une droite  $\overline{S_1H}$  passant par le point de coupe H de  $a_1$  avec  $K_1^2$ .

Dans le cas considéré, nous aurons toujours un point H, mais un seul, donc la seconde tangente par  $S_1$  est déterminée d'une manière absolument univoque. Son point de tangence B sur  $C^3$  s'obtient avec  $\overline{S_2D}$ , D étant le point de coupe de  $a_1$  avec la tangente de  $K_1^2$  en H.

En joignant  $S_1$  et B à  $S_2$  nous obtenons 2 rayons  $\overline{S_2S_1}$  et  $\overline{S_2B}$  conjugués mais non réciproques.

A chaque position de  $S_1$  sur  $C^3$  correspondront deux rayons de ce genre en  $S_2$ . Ces rayons formeront ainsi deux divisions homographiques concentriques en  $S_2$ . La tangente de rebroussement sera un rayon double.

Le 2<sup>e</sup> rayon double correspondra à un point J pour lequel les deux tangentes de  $C^3$  menées par J seront confondues et auront le même point de tangence J. Deux tangentes confondues avec un même point simple de la courbe comme point de tangence forment une tangente d'inflexion et le point considéré est un point d'inflexion.

Pour déterminer ce deuxième rayon double nous devons d'a-

$D_1$  et D. Elle passe par D et A sur  $P_1$ . A est également le point de tangence de  $K^3$  avec  $P_1$ .

La base  $P_1$  rencontre la courbe  $K^3$  en son point de tangence et un autre point B situé sur  $P_1$  et sur la tangente  $\overline{D_1B}$  de  $C_1^2$  par  $D_1$ . Cette tangente représente 2 rayons confondus du faisceau  $D_1$ ; le rayon homologue  $\overline{ND}$  par D donne un point double sur  $P_2$  soit  $B_1B_2$ . La droite  $\overline{B_1B}$  ou  $\overline{B_2B}$  forme deux tangentes confondues de la courbe  $K^3$ ; elles se coupent en B qui est un point de  $K^3$ ; la tangente de  $K^3$  en B est donc  $\overline{BB_1}$  ou  $\overline{BB_2}$ . Puisque  $D_1$  est déjà sur une tangente  $P_2$  de  $C_1^2$  nous ne pouvons plus mener que la tangente  $\overline{D_1B}$  par ce point. La base  $P_1$  coupe  $P_2$  en E, et ce point est conjugué des points de tangence confondus  $E_1$  et  $E_2$ . La tangence de  $K^3$  par B coupe  $P_2$  en  $B_1$ . Les points E et  $B_1$  sont donc conjugués d'une manière absolument univoque sur  $P_2$ . A chaque position de la base  $P_1$  sur la courbe  $K^3$  correspondent ainsi deux points conjugués sur  $P_2$ . Ces points forment 2 divisions homographiques de même base avec le point d'inflexion  $E_1 E_2$  comme point double.

Le 2<sup>e</sup> point double correspondra à une tangente V de  $K^3$  pour laquelle son point de tangence avec  $K^3$  et son autre point de coupe avec  $K^3$  sont confondus. Les tangentes en ces deux points confondus sont elles-mêmes confondues avec V, donc le point est un point de rebroussement et la tangente

bord chercher une autre paire de rayons conjugués par  $S_2$ .

Nous prendrons A comme nouveau point de  $C^3$ . Les rayons  $\overline{AS_1} = a = L$  et  $S_2S_1 = L_1$  sont conjugués. Ils peuvent déterminer une nouvelle conique auxiliaire  $K_2^2$ . Pour celle-ci on a :

une tangente par  $S_2$  en  $S_2$

une tangente par A en C, et

la tangente  $\overline{DE}$  relative aux rayons par le point B.

En procédant comme précédemment nous devons chercher le point de coupe de  $L_1$  avec la conique  $K_2^2$ . Soit  $H'$  ce point ; il faudra mener ensuite la tangente de  $K_2^2$  par  $H'$  jusqu'en  $D'$  sur L.

Pour y arriver nous cherchons le point de tangence T de DE au moyen des triangles inscrits et circonscrits relatifs aux points  $S_2$ , C et T. Nous utilisons le point de Brianchon.

Cela étant, nous considérons les faisceaux  $S_2$  et C pour la conique  $K_2^2$  et leur centre d'homographie  $\alpha$  ; nous en déduisons aisément le point de coupe  $H'$  de  $S_2S_1$  avec  $K_2^2$ . La tangente en  $H'$  s'obtient avec le triangle circonscrit mené par les points  $S_2C$  et  $H'$ . On emploie la droite de Pascal.

La tangente trouvée coupe L en  $D'$ . Les rayons  $\overline{S_2A}$  et  $\overline{S_2D'}$  sont deux nouveaux rayons conjugués des faisceaux en  $S_2$ .

Il reste à déterminer le rayon double. On utilise la construction bien connue par laquelle on coupe les faisceaux en  $S_2$  par une conique. On emploie la première conique  $K_1^2$ .

V une tangente de rebroussement.

Pour obtenir ce point, nous devons avoir une 2<sup>e</sup> paire de points conjugués sur  $P_2$ .

Soit  $DD_1$  une nouvelle tangente de  $K^3$ . Les points conjugués D et E sont pris comme sommets des faisceaux déterminant la nouvelle conique auxiliaire  $C_2^2$ . Pour celle-ci on a :

le point  $E_1E_2$  et la tangente en ce point,

le point D et la tangente  $DD_2$ , puis le point de coupe C des rayons relatifs à la tangente  $\overline{BB_1}$ .

On doit avoir ensuite la tangente par E à  $C_2^2$  et son point de tangence  $N'$  sur  $C_2^2$  afin de déterminer le rayon  $DN'$  donnant le point  $B'_1B'_2$  et la tangente  $\overline{B'B'_1}$  ou  $\overline{B'B'_2}$ .

On cherche d'abord la tangente de  $C_2^2$  par C avec les triangles inscrits et circonscrits des points  $E_1DC$ . On se sert de la droite de Pascal et on trouve la tangente CF.

Les ponctuelles sur  $ED_1$  et  $DD_2$  déterminent aussi la conique  $C_2^2$  ; l'axe d'homographie est  $E_1D$ . On en déduit sans peine la tangente de  $C_2^2$  par E soit EM. Le point de tangence  $N'$  est établi avec le triangle circonscrit  $D_2EM$ .

On a utilisé le point de Brianchon.

Le rayon  $DN'$  coupe  $P_2$  en  $B'_1B'_2$ . Les points  $D_1$  et  $B'_1$  sont deux nouveaux points conjugués des ponctuelles sur  $P_2$ . Il faut encore trouver le 2<sup>e</sup> rayon double. Au moyen de la construc-

On obtient alors le rayon  $\overline{S_2J}$ . Le point de coupe de ce rayon avec la cubique  $C^3$  est J; on le trouve aussi avec la conique  $K_1^2$ .

D'après ce qui précède, le point J est le point d'inflexion cherché.

Soit J le point d'inflexion et  $K_3^2$  la conique relative aux faisceaux  $S_2$  et J.

Les rayons conjugués déterminant cette conique sont  $S_2S_1 = a'_1$  et  $JS_1 = a'$ . Désignons par  $H''$  le point de coupe de  $a'_1$  avec  $K_3^2$ .

Nous aurons  $JH''$  et la tangente de  $K_3^2$  par J qui doivent être confondues. Donc la ligne de jonction de J avec  $H''$  est une tangente de la conique auxiliaire  $K_3^2$ .

Basé sur cette observation, nous pouvons déterminer la tangente d'inflexion par J. Ce sera la deuxième tangente de la conique auxiliaire de J par J.

Pour cette conique  $K_3^2$  nous aurons la tangente en  $S_2$ , le rayon  $\overline{JS_1}$  qui est aussi une tangente et les tangentes III et IV provenant des points A et B.

Nous obtiendrons la tangente en J avec le théorème de Brianchon.

Le point de tangence  $H''$  de celle-ci avec  $K_3^2$  est également sur le premier rayon  $\overline{S_2S_1}$ .

tion connue avec la première conique  $C_1^2$  on arrive au point S.

On construit la tangente en S de  $K^3$  également avec la courbe  $C_1^2$ .

D'après ce qui précède, cette tangente de la courbe  $K^3$  par S est la tangente de rebroussement cherchée.

Soit  $P_3 = V$  par S, la tangente de rebroussement, et  $C_3^2$  la conique auxiliaire relative aux droites  $P_2$  et  $P_3$ .

Les points conjugués qui déterminent cette conique sont T et  $D_1$  sur  $P_1$ . Le deuxième point de coupe R ou  $A''$  de  $P_3$  avec  $C_3^2$  doit être confondu avec  $B''$  sur  $K^3$ , et il en sera de même des tangentes de  $K^3$  par ces points. En conséquence, le point de coupe de R de  $P_3$  avec  $C_3^2$  est situé sur la tangente de  $C_3^2$  passant par  $D_1$ .

Basé sur cette observation, nous pouvons déterminer le point de rebroussement R, sur la tangente de rebroussement ST.

La conique  $C_3^2$  est déterminée par les bases  $P_2$  et  $P_3 = ST$ . T est sur  $P_1$ , il est alors le conjugué de  $D_1$ .

Nous avons pour  $C_3^2$ : la tangente  $P_2$  en  $E_1$ , le point T, les points I et II provenant des tangentes  $BB_1$  et  $BE$  de  $K^3$ .

Le point de rebroussement est le 2<sup>e</sup> point de coupe de  $P_3$  avec  $C_3^2$ . On l'obtient par l'hexagone de Pascal. C'est R.

La tangente de  $C_3^2$  en R doit passer par  $D_1$ .

### 3. Méthode involutive. (Fig. 3.)

Les faisceaux de la correspondance sont également  $S_2$  et

### 4. Méthode involutive. Fig. 4.)

Les bases de la correspondance étant également  $P_1$  et  $P_2$ ,

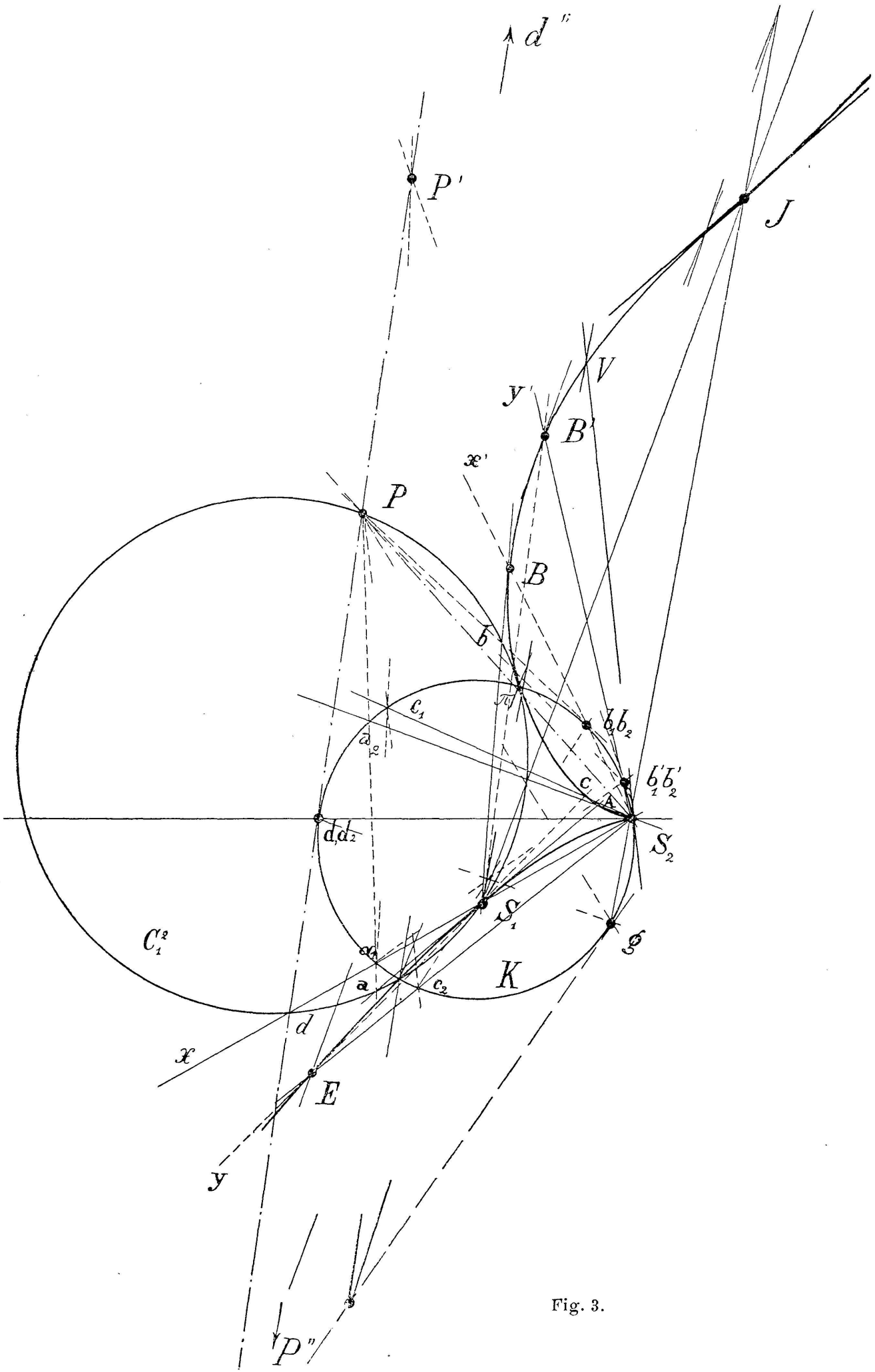


Fig. 3.

$S_1$  et ils engendrent une courbe du 3<sup>e</sup> degré  $C^3$ . Les rayons de  $S_2$  forment une involution que l'on coupe par un cercle  $K$ . Le centre correspondant est  $P$ . Les faisceaux homographiques simples en  $P$  et en  $S_1$  engendrent la conique auxiliaire  $C^2$ .

Comme nous considérons le cas où  $S_2$  est un point de rebroussement, la droite  $\overline{Pd}$  relative au rayon  $S_2S_1$  doit être une tangente de  $K$  en  $d_1d_2$ .  $Sd_1$  est donc la tangente de rebroussement en  $S_2$ .

La tangente en  $S_1$  dépend du rayon  $\overline{Pa_1a_2}$ . Elle coupe encore la courbe  $C^3$  en  $A$ . La seconde tangente par  $S_1$  est donnée par la tangente  $\overline{Pb_1b_2}$  de  $K$ ; c'est  $\overline{S_1bB}$  avec le point de tangence  $B$  sur  $\overline{S_2b_1B}$ .

Dès maintenant nous pouvons considérer un point quelconque  $E$  de  $C^3$  comme sommet du faisceau simple engendrant la courbe avec  $S_2$ . Le rayon  $\overline{ES_1}$  coupe  $C^3$  en  $C$ .  $\overline{S_2S_1}$  et  $\overline{S_2C}$  sont conjugués à  $\overline{ES_1C}$ . L'involution en  $S_2$  admettra un nouveau centre en  $P'$  sur la tangente  $\overline{Pd_2}$ . Il se trouvera également sur la transversale  $a_1c_1$ .

La tangente  $\overline{P'b'_1}$  de  $K$  détermine le rayon  $\overline{S_2b'_1B'}$  et la tangente  $\overline{EB'}$  de  $C^3$  par  $E$ . On a trouvé  $B'$  au moyen des faisceaux primitifs  $S_2$  et  $S_1$ .

Les rayons  $\overline{S_2S_1} = x$  et  $\overline{S_2B} = x'$  puis  $\overline{S_2E} = y$   $\overline{S_2B'} = y'$  forment comme précédemment deux paires de rayons univoquement conjugués, mais non réciproques. Ils appartiennent à deux

elles engendrent une courbe de 3<sup>e</sup> classe  $K^3$ . Les points sur  $P_2$  forment une involution: en menant un cercle  $C$  tangent de  $P_2$ , les tangentes issues des points conjugués donnent un axe d'involution  $\overline{ab}$ . Les divisions homographiques sur  $\overline{ab}$  et sur  $P_1$  engendrent une conique auxiliaire  $K_1^2$ .

Nous considérons le cas où  $P_2$  est une tangente d'inflexion. Il faut qu'une des droites  $\overline{Aa}$  ou  $\overline{Ab}$  soit une tangente de  $K_1^2$ .  $A$  est le point de coupe des bases et  $a$  ou  $b$  sont les intersections de l'axe  $\overline{ab}$  avec  $C$ . La tangente de  $C$  par  $a$  donne le point d'inflexion sur  $P_2$ ,  $\overline{Aa}$  étant la tangente de  $K_1^2$ . Le point de tangence de  $P_1$  dépend de la tangente de  $C$  par  $A = C_1$ . La tangente est  $\overline{C_1c}$  et le point de tangence cherché est  $C$  sur  $P_1$ .

Le 2<sup>e</sup> point de coupe de  $P_1$  avec  $K^3$  est déterminé par la tangente de  $K_1^2$  par  $b$ ; c'est  $B$ .

En désignant  $C$  par  $x$  et  $B_1B_2$  conjugués de  $B$  par  $x'$ , nous aurons deux points univoquement conjugués et non réciproques sur  $P_2$ .

Prenons maintenant une autre tangente de  $K^3$  soit  $EE_1 = P_3$  comme nouvelle base simple. On a  $E_1 = y$ . Les points  $C_1$  et  $E_2$  sont conjugués sur  $P_2$  et les tangentes correspondantes à  $C_1$  se coupent en  $e'$ : le nouvel axe d'involution est  $\overline{ae'}$ , car  $a$  est l'enveloppe de tous ces axes. Cet axe coupe  $C$  en  $b'$ . La tangente de  $C$  par  $b'$  donne le point conjugué de  $E_1$ , soit  $y'$ .

Les points conjugués  $.x.x'$  et

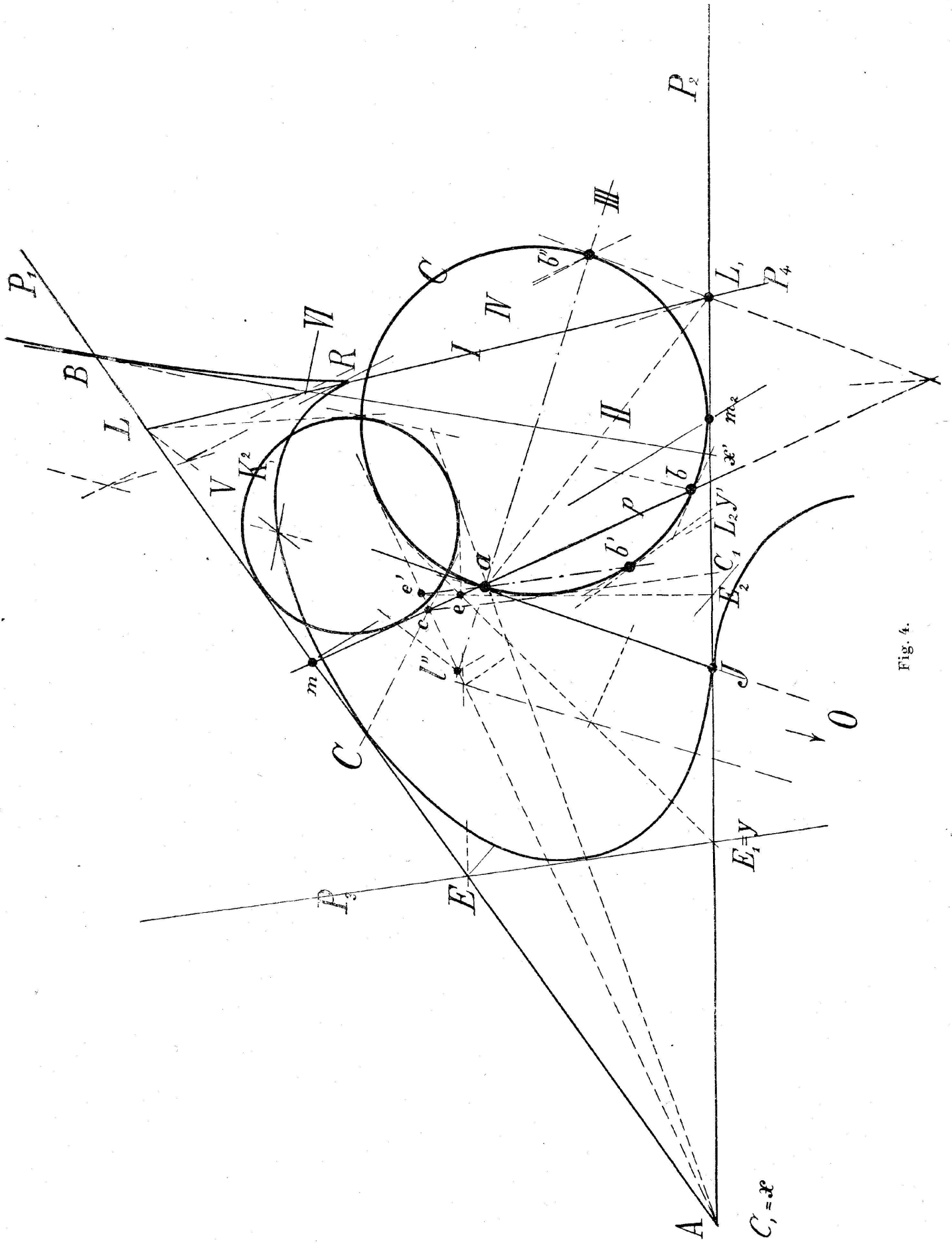


Fig. 4.

faisceaux homographiques concentriques en  $S$ .  $\overline{S_2 d_1}$  ou la tangente de rebroussement est un rayon double.

Le second rayon double passera par un point simple de  $C^3$  tel que les deux tangentes de  $C^3$  par ce point seront confondues. Le second rayon double passera donc par le point d'inflexion.

Comme d'après ce qui précède il n'y a qu'un tel rayon, il n'y aura qu'un seul point d'inflexion sur la courbe  $C^3$ .

On obtient ce deuxième rayon double au moyen du cercle primitif  $K$ . L'axe d'homographie correspondant est  $\overline{d_1 g}$  avec  $g$  sur  $K$ . Le rayon double passe par  $S_2$  et par  $g$ .

Nous déterminerons le point d'inflexion  $J$  en cherchant l'intersection de  $S_2 g$  avec  $C^3$  au moyen des faisceaux primitifs.

Si la cubique est déterminée par les faisceaux  $S_2$  et  $J$ ,  $S_2$  étant un point de rebroussement et  $J$  un point d'inflexion, nous désignerons la conique auxiliaire par  $C_2^2$ . Le point de coupe de  $S_2 J$  avec  $C_2^2$  soit  $d''$  sera sur la tangente de  $K$  par  $d_1$ ,  $d_1$  étant sur  $K$  et sur la tangente de rebroussement.  $P''$  sera sur  $dd''$  et sur  $C_2^2$ . D'un autre côté, la tangente de  $K$  par  $P''$  donnera un point de tangence  $g$  sur  $S_2 J$ .

Pour trouver la tangente d'inflexion par  $J$  nous établirons la conique précédente  $C_2^2$  et nous procéderons ensuite comme pour la tangente en  $S_1$ . Nous prendrons le 2<sup>e</sup> point de coupe de  $P'' g$  avec  $C_2^2$  soit  $\alpha'$ , et la droite  $J\alpha'$  sera la tangente désirée.

$yy'$  sur  $P_2$  appartiennent à deux divisions homographiques simples sur  $P_2$ ; le point d'inflexion  $J$  est un point double de ces divisions.

Elles ont encore un second point double  $L_1$  et la tangente de  $K^3$  par  $L_1$  donnera une tangente de rebroussement, puisque son second point de coupe avec  $K^3$  est confondu avec son point de tangence et que les tangentes en ces points sont également confondues.

Comme il n'y a qu'un deuxième point double possible, il n'y a donc qu'une seule tangente de rebroussement de la courbe  $K^3$ .

Nous trouverons le point double  $L_1$  avec le cercle  $C$  et les tangentes par  $xx'$  et  $yy'$ . Nous obtenons un centre d'homographie  $O$  et la tangente de  $C$  par ce point donne  $b''$  sur  $C$ , puis  $L_1$  le point cherché sur  $P_2$ .

Nous aurons la tangente de rebroussement par  $L_1$  en utilisant les bases primitives  $P_1$  et  $P_2$ . Nous trouverons ainsi la tangente  $\overline{LL_1}$ .

Si la courbe  $K^3$  est déterminée par les divisions  $P_2$  et  $P_4 = \overline{LL_1}$ , nous aurons une nouvelle conique auxiliaire  $K_2^2$ . Soit  $L_1$  le point de coupe des bases, la 2<sup>e</sup> tangente de  $K^3$  par  $L_1$  sera  $\overline{L_1 R}$ , la 2<sup>e</sup> tangente de  $C$  par  $L_1$  sera  $\overline{L_1 b''}$ , les points  $a$  et  $b''$  sont sur  $C$  et sur l'axe d'involution.

La tangente de  $C$  par  $a$  donne le point d'inflexion et la tangente de  $K_2^2$  par  $b''$  passe par le point de rebroussement  $R$ .

Pour trouver le point de rebroussement lui-même, nous construirons la conique précé-

La conique auxiliaire  $C_2^2$  relative à  $J$  est donnée par les conditions suivantes : elle passe par  $J$ , par  $d''$  sur  $S_2J$  et la tangente de  $K$  par  $d_1$ , puis par  $P''$  sur  $d''d_1$  et la tangente de  $K$  par son second point de coupe  $g$  avec  $S_2J$ .

Nous pouvons en outre prendre les points  $IV$  et  $V$ . Le premier est déterminé au moyen des rayons homologues  $SE$  et  $IE$ ;  $S_2E$  coupe  $K$  en  $c_2$ ;  $\overline{P''c_2}$  coupe ensuite  $IE$  en  $IV$  sur  $C_2^2$ .

On a de même  $V$  au moyen du point de  $B$ .

Nous cherchons ensuite le 6<sup>e</sup> point de  $C_2^2$  sur  $\overline{P''g}$ , par l'hexagone de Pascal.

*La ligne de jonction de ce point avec  $J$  est la tangente d'inflexion.*

Comme 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> points nous pouvons aussi utiliser le conjugué de  $J$  par rapport au corésiduel  $V$ , et enfin nous pourrions nous servir des points de coupe de  $K$  avec la première conique auxiliaire  $C_1^2$ .

Ce dernier procédé est le moins avantageux, car seuls ces points ne peuvent pas être établis avec la règle et le compas.

Dans les autres considérations tous les points peuvent être établis avec la règle et le compas.

Les observations qui précèdent nous montrent que la construction des points d'inflexion dans les courbes du 3<sup>e</sup> degré et de la 3<sup>e</sup> classe, ainsi que celle des tangentes de rebroussement dans les courbes de la 3<sup>e</sup> classe et de 3<sup>e</sup> degré peuvent être entièrement exécutées avec la règle et le compas,

dente  $K_2^2$  et nous chercherons sa 2<sup>e</sup> tangente par  $b''$ .

La conique auxiliaire  $K_2^2$  relative à  $LL_1$  est donnée par les tangentes  $P_4 = I$ ,  $L_1a = II$  et l'axe d'involution correspondant  $\overline{ab''} = III$ .

Nous prenons en outre les tangentes  $V$  et  $VI$ . Pour trouver  $V$  nous menons par  $L_2$  la tangente de  $C$  jusqu'à  $l''$  sur l'axe  $ab''$  puis on a  $l''L_2 = V$ . On a de même  $VI$  au moyen de la tangente  $BB_1 = Bx'$  de  $K^3$ .

Nous cherchons la tangente de  $K_2^2$  par  $b''$  au moyen de l'hexagone de Brianchon.

*Le point de coupe de cette dernière tangente avec  $\overline{LL_1}$ , soit  $R$  est le point de rebroussement.*

Les 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> tangentes nécessaires peuvent être des tangentes communes de  $K$  et  $C_1^2$  ou encore la tangente conjuguée de  $LL_1$  par rapport à la droite corrésiduelle  $\overline{mm_2}$ .

De ces diverses méthodes, celle des tangentes communes à toutes les coniques du faisceau homographique possible de la division sur la droite corrésiduelle est la moins avantageuse au point de vue constructif.

Toutes les autres méthodes conduisent à des constructions réalisables par la règle et le compas, ce qui n'est pas le cas pour la méthode des tangentes communes.



et cela de plusieurs manières différentes. Ces observations nous conduisent en outre aux règles dualistiques suivantes résumant les constructions :

*Une cubique  $C^3$  à point de rebroussement  $S_2$  étant donnée par les points nécessaires, la ligne de jonction de  $S_2$  avec chaque point  $S_1$  est univoquement conjuguée à la ligne de jonction de  $S_2$  avec le point de tangence  $B$  de la tangente de  $C^3$  menée par  $S_1$ .*

*Cette relation n'est pas réciproque.*

*Ces droites forment deux faisceaux homographiques concentriques en  $S_2$  dont les rayons doubles sont d'une part la tangente de rebroussement et d'autre part une droite passant par le point d'inflexion.*

*Une courbe de 3<sup>e</sup> classe  $K^3$  à tangente d'inflexion  $P_2$  étant donnée par les éléments nécessaires, le point de coupe de  $P_2$  avec chaque tangente simple  $P_1$  est univoquement conjugué au point de coupe de  $P_2$  avec la tangente de  $K^3$  menée par le point d'intersection de  $P_1$  avec  $K^3$ .*

*Cette relation n'est pas réciproque.*

*Ces points forment deux ponctuelles homographiques sur la même base  $P_2$ ; les points doubles sont d'une part le point d'inflexion et d'autre part, un point situé sur la tangente de rebroussement.*

L. CRELIER (Berne-Bienne).

---

## SUR LES COURBES DE RIBAUCCOUR

---

Dans une récente thèse *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Heidelberg, 1911), M. Léopold BRAUDE a appelé l'attention sur certaines courbes qu'il a nommées *Zwischenevolute* et que je désignerai par la dénomination de *développées intermédiaires*. Soit une courbe plane (C); soit P le point qui divise en une raison donnée  $\lambda$  le rayon de courbure  $M\mu$  de la courbe (C) en M, c'est-à-dire soit P le point tel que l'on ait :

$$\frac{M\mu}{MP} = \lambda ;$$

$\lambda$  étant un nombre algébrique fixé, lorsque le point M décrit la