Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1913)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES COURBES DE RIBAUCOUR

Autor: Turrière, É.

Kapitel: II. — Equations tangentielles des courbes de Ribaucour.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14873

cour admet une courbe limite lorsque m s'annule ; celle-ci est représentée par l'équation

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = \text{arc cos } e^{-y} - \text{arc cos } e^{-y_0} \;;$$

par un changement d'origine, on la réduit à la forme suivante :

$$x = \text{arc cos } e^{-y} \;;$$

d'où il résulte que cette courbe limite est la chaînette d'égale résistance de Coriolis :

$$e^{y} \,.\, \cos x = 1 \;.$$

Cette courbe est du second ordre de transcendance, de même que la courbe générale de la famille de courbes de Ribaucour dont elle est la limite.

II. — Equations tangentielles des courbes de Ribaucour.

Sauf pour la parabole, la chaînette, et la cycloïde, je n'ai trouvé aucune trace de recherches sur l'équation tangentielle d'une courbe de Ribaucour. L'équation tangentielle de la cycloïde a été formée par W. H. Besant dans ses *Exercices pour la licence* (voir *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1871, p. 286). Quant à la chaînette, son équation tangentielle — que l'on trouvera plus loin — n'a pas été considérée à proprement parler ; mais l'équation analogue de l'alysséide a été fréquemment envisagée.

Il est aisé de former l'équation tangentielle d'une courbe de Ribaucour en partant de son équation ponctuelle. Je vais former cette même équation, d'après la propriété géométrique qui définit une courbe de Ribaucour.

J'utiliserai à cet effet le système de coordonnées polaires tangentielles de Hesse et de Ferrers : la courbe est considérée comme enveloppée par la droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi \;;$$

en prenant l'axe Ox pour base de la courbe de Ribaucour, la condition géométrique imposée à cette courbe est

$$\text{MC} = m \,.\, \text{MN} \;;$$

M est un point quelconque de la courbe de coordonnées :

$$\mathrm{M}\left\{\begin{aligned} x &= \varpi \cos\varphi - \frac{d\varpi}{d\varphi}\sin\varphi\ , \\ y &= \varpi \sin\varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi\ ; \end{aligned}\right.$$

N est la trace sur Ox de la normale d'équation :

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = \frac{d\varpi}{d\varphi}\ ;$$

C est le rayon de courbure situé sur la normale précédente : ses coordonnées sont

$$\mathrm{C}\left\{\begin{aligned} x_c &= -\frac{d\varpi}{d\varphi}\sin\varphi - \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}\cos\varphi\ , \\ y_c &= \frac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi - \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}\sin\varphi\ ; \end{aligned}\right.$$

portons les valeurs des ordonnées de M et de C dans la relation

$$y_{\mathrm{M}} - y_c = my_{\mathrm{M}}\ , \qquad \text{ou} \qquad y_c = (1-m)y_{\mathrm{M}}\ ;$$

on obtient ainsi une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi - \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}\sin\varphi = (1-m)\left[\varpi\sin\varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi\right]\ ;$$

toutes simplifications faites, cette équation se réduit à

$$\left(\varpi + \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}\right)\sin\varphi = m\left(\varpi\sin\varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi\right)\ ;$$

on peut l'écrire sous la forme équivalente

$$\operatorname{tang}\varphi\,\frac{dy}{d\varphi} = my\ ,$$

en introduisant l'ordonnée y du point M de la courbe. Une première intégration donne donc

$$y = \mathrm{A}\sin^m\varphi\ ;$$

comme on a d'autre part

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\varpi}{\cos\varphi}\right) \equiv \frac{y}{\cos^2\varphi}\ ,$$

il en résulte par une seconde intégration :

$$\varpi = \mathrm{A} \cos \varphi \int_0^\varphi \frac{\sin^m \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi + \mathrm{B} . \cos \varphi \quad .$$

Telle est la formule désirée : cette équation tangentielle générale de la courbe de Ribaucour dépend de deux constantes arbitraires A et B. La présence de B est due à ce que la question se traduit par une équation différentielle qui admet la translation parallèle à Ox pour transformation infinitésimale. Par un choix convenable de l'origine, on peut toujours faire disparaître le terme en $\mathrm{B} . \cos \varphi$. Quant à la constante A, elle provient de ce que l'homothétie est aussi une transformation infinitésimale. Pour faire l'étude d'une courbe de Ribaucour d'indice m, on pourra, par conséquent, se borner à celle de la courbe que représente l'équation :

$$\varpi = \cos \varphi \int_0^\varphi \frac{\sin^m \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi \ .$$

Pour $m = 0$, on trouve bien un point, qui du point de vue tangentiel est une courbe de Ribaucour particulière. Pour $m = 1$, on trouve un cercle dont le centre est le pôle.

Pour $m = -1$, l'intégration donne l'équation tangentielle,

$$\varpi = 1 + \cos \varphi \ \log \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \ ,$$

de la chaînette ordinaire

Pour $m = -2$, c'est celle,

$$\varpi = - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \ ,$$

de la parabole.

Pour $m = +2$, on se trouve en présence de la cycloïde ordinaire ; son équation polaire tangentielle est

$$\varpi = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \ .$$

Un changement de pôle permet de se servir de l'équation

$$\varpi = \varphi \cos \varphi$$

pour représenter la cycloïde. Le pôle étant pris au sommet d'un arc de la cycloïde, on pourra lui donner l'équation tangentielle :

$$\varpi = \varphi \sin \varphi \ .$$

Il en résulte que, par rapport à un sommet, la cycloïde ordinaire est la podaire négative de la courbe d'équation polaire

$$r = \theta \sin \theta \ ;$$

cette courbe remarquable se déduit de la spirale d'Archimède par la transformation que M. Brocard utilisa pour définir le trifolium à partir du cercle et qui permet aussi de faire dériver la cochléoïde de la spirale hyperbolique et la logarithmoïde de M. Köstlin de la spirale logarithmique.

L'équation tangentielle de la courbe de Ribaucour la plus générale permet d'étudier simplement des courbes associées à ces courbes. En dérivant l'expression de ϖ, on trouve :

$$\varpi + \varpi'' = m \sin^{m-1} \varphi \ .$$

Le rayon de courbure est ainsi :

$$\mathrm{R} = m \sin^{m-1} \varphi \ .$$

On sait que Tücker a donné le nom de *radiale* à la courbe lieu des extrémités des vecteurs équipollents aux rayons de courbure menés par un pôle fixe. En d'autres termes, l'équation polaire de la radiale s'obtient immédiatement à partir de l'équation naturelle de la courbe, en changeant les significations des lettres R et φ. Dans les notations ordinaires, l'équation polaire de la radiale de la courbe de Ribaucour est donc celle d'une courbe de Clairault :

$$r = m \sin^{m-1} \theta \ .$$

C'est là une courbe algébrique ou interscendante que l'on rencontre assez fréquemment, dans des cas particuliers et dans diverses applications. C'est un résultat signalé incidemment par M. L. Braude dans un mémoire des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (XXXIV, 1912, p. 286) « *Ueber Roll- und Fusspunkt-Kurven* ».

Il est aisé de vérifier ainsi que la radiale de la cycloïde est un cercle, et que celle de la chaînette est la courbe *Campyle*.

L'application de ces coordonnées tangentielles permet d'effectuer la rectification de la courbe de Ribaucour. On a

$$\frac{ds}{d\varphi} = \mathrm{R} \ ;$$

d'où :

$$s = m \int \sin^{m-1} \varphi \, . \, d\varphi \ .$$

Il en résulte immédiatement l'équation intrinsèque donnée par CESARO :

$$(m-1)s = \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{m}\right)^{\frac{2}{1-m}} - 1}} ;$$

on retrouve bien ainsi que la *courbe de Mannheim* d'une courbe de Ribaucour est une courbe affine à une autre courbe de Ribaucour. En se reportant aux recherches de M. L. BRAUDE, on peut dire que, parmi les courbes de Mannheim, généralisées au sens de M. BRAUDE et qu'il est possible d'attacher à une courbe de Ribaucour quelconque, se trouve toujours une autre courbe de Ribaucour.

M. E. KÖSTLIN a récemment associé à une courbe plane quelconque une nouvelle courbe qu'il appelle *l'arcuide* de la courbe considérée. Cette arcuide s'obtient en prenant pour fonction ϖ l'expression

$$s \cos \varphi ;$$

l'arcuide d'une courbe de Ribaucour est donc une courbe d'équation polaire tangentielle

$$\varpi = m \cos \varphi \int \sin^{m-1} \varphi \, d\varphi ;$$

l'arcuide d'une courbe de Ribaucour a pour équation naturelle :

$$R = m(m-1)\sin^{m-2} \varphi - m(m+1)\sin^{m} \varphi ;$$

on peut donc la considérer comme étant l'antiradiale d'une certaine courbe (algébrique si m est rationnel, interscendante et panalgébrique si m est irrationnel) d'équation polaire :

$$r = m(m-1)\sin^{m-2} \theta - m(m+1) \sin^{m} \theta ;$$

cette dernière courbe peut d'ailleurs être construite comme étant la cissoïdale de deux courbes de Clairault du genre précédemment rencontré

$$r = A \sin^{\mu} \theta .$$

III. — A côté des courbes de Ribaucour, il conviendra de placer les courbes d'équation :

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} + 1}} ;$$

elles sont en effet *affines des courbes de Ribaucour*, à condition d'introduire des nombres imaginaires. Pour $m = -2$, cette équation représente une parabole; pour $m = -1$, la courbe correspondante est une hyperbole du second degré. Pour $m = +1$, la courbe est transcendante panalgébrique : c'est la sinusoïde hyperbolique.

Pour m quelconque, on n'a pas encore eu à envisager de telles courbes, pour la raison qu'elles ne se présentent pas dans les applications. J'ai cependant rencontré la courbe $m = \frac{1}{2}$, à propos de l'étude d'une autre courbe transcendante.

Dans des recherches de géométrie, j'ai été amené à considérer la courbe dont la radiale est la courbe panalgébrique :

$$r = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} \mu\theta}},$$

Cette courbe d'équation naturelle

$$R = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} \mu\varphi}},$$

peut être représentée par les équations:

$$x = \int \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\operatorname{sh} \mu\varphi}} d\varphi,$$

$$y = \int \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\operatorname{sh} \mu\varphi}} d\varphi;$$

elle est transcendante et son ordre de transcendance est toujours 3, *quel que soit* μ. Ces équations paramétriques de la courbe rappellent, quant à leur forme, celles qui servent à représenter la *pseudo-chaînette*. Quel que soit μ, on a l'équation intrinsèque suivante :

$$\frac{\mu}{2} s = \int \frac{dR}{\sqrt{R^4 + 1}};$$

la rectification s'effectue à l'aide des intégrales elliptiques. La courbe de Mannheim est donc une des courbes affines aux courbes de Ribaucour (au sens qui vient d'être précisé) avec la valeur $m = \frac{1}{2}$ de l'indice.

IV. — Il me reste à signaler que, dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1913), intitulé « *Généralisation des courbes de Ribaucour* », j'ai considéré les mêmes courbes que

M. Braude, dans son article déjà cité *Ueber die Kurven unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden*. Ce n'est qu'après l'impression de mon travail, que j'ai eu connaissance de celui de M. Braude. Nos méthodes sont d'ailleurs essentiellement distinctes, puisque M. Braude utilisait l'expression du rayon de courbure de la développée intermédiaire et formait l'équation de la courbe en coordonnées intrinsèques. En ce qui me concerne, au contraire, poursuivant les calculs d'un récent article *Sur les roulettes à base rectiligne* (*Enseignement mathématique*, XV[e] année, n° 4, p. 319-325, 1913), j'ai utilisé les coordonnées tangentielles, et, désirant généraliser un théorème d'Ossian Bonnet, j'ai établi un mode de génération cinématique des courbes obtenues.

É. Turrière (Montpellier).

SUR LES AXES ROTATIFS

Dans une intéressante étude *Sur les axes principaux d'inertie*, publiée dans l'*Enseignement mathématique* du 15 juillet 1913, M. Bouny établit deux propositions concernant les axes susceptibles d'être axes instantanés de rotation sous l'action d'une percussion [1].

Ces axes, que nous avons proposé d'appeler *axes rotatifs* [2], par opposition aux axes hélicoïdaux (axes de rotation et de glissement) satisfont, comme l'indiquent la plupart des traités de mécanique [3], à la condition nécessaire et suffisante d'être axes principaux d'inertie par rapport à l'un de leurs points.

M. Bouny démontre 1° que dans les ellipsoïdes d'inertie contruits sur les différents points d'un de ces axes, les plans diamétraux conjugués à l'axe sont normaux au plan déterminé par l'axe et par le centre de gravité ; 2° que ces plans diamétraux conjugués forment un faisceau de plans, ayant pour axe la ligne d'action de la percussion correspondante.

---

[1] Pour éviter toute confusion, faisons observer que nos raisonnements s'appliquent à une percussion sollicitant un solide libre dans l'espace et primitivement immobile. Un axe instantané de rotation, réalisé en ce cas, coïncide évidemment avec un axe fixe, dont les réactions sont nulles à l'instant de la percussion.

[2] *Centres de percussion et axes de rotation* (Revue de Mécanique, avril 1911 ; Bulletin technique de l'Association des ingénieurs sortis de l'Ecole polytechnique de Bruxelles, avril 1911).

[3] Cf. Appell, t. II, 3[e] éd., 1911, n° 512, p. 498 ; Sturm, t. II, 3[e] éd.. 1875, p. 154 ; Graindorge, 1889, t. II, p. 341, etc., etc.