

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 15 (1913)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Rubrik:** CHRONIQUE

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# CHRONIQUE

---

Conférence internationale de l'Enseignement mathématique.

Paris, 1-4 avril 1914.

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique se réunira à Paris, du 1<sup>er</sup> au 4 avril 1914, en une Conférence ayant principalement pour objet l'étude des deux questions suivantes :

A. — *Les résultats obtenus dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement moyen.*

B. — *De la place et du rôle des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur.*

Les séances auront lieu à la Sorbonne ; entrées : rue des Ecoles et rue de la Sorbonne.

## PROGRAMME :

### MERCREDI 1<sup>er</sup> AVRIL.

Après-midi, 2<sup>1/2</sup> h. — Séance du Comité central.

» 4 h. — Séance des délégués.

Soir, 8<sup>3/4</sup> h. — Sorbonne, séance de la Société Mathématique de France.

### JEUDI 2 AVRIL.

**Matin, 9<sup>1/2</sup> h.** — *Séance générale d'ouverture*, sous la présidence de M. Lucien POINCARÉ, directeur de l'enseignement secondaire, représentant le Ministre de l'Instruction publique.

Allocution de bienvenue de M. P. APPELL, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences.

Discours de M. le Prof. F. KLEIN (Göttingue), président de la Commission.

Allocution du représentant du Ministre de l'Instruction publique.

Conférence de M. Emile BOREL, sur *l'adaptation de l'enseignement aux progrès de la Science*.

Conférence de M. D'OCAGNE, sur *le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur*.

**Après-midi, 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub> h.** — *Séance de travail* consacrée à l'étude de la question A : *Introduction des premières notions du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans l'enseignement secondaire*.

Rapport général de M. le Prof. BEKE (Budapest), sur les réponses reçues relativement à la question A.

Rapport spécial de M. Ch. BIOCHE, sur l'organisation de l'enseignement du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les lycées de France, et sur les résultats obtenus.

Indications complémentaires fournies par les divers délégués.

Discussion.

#### VENDREDI 3 AVRIL.

Les séances du vendredi seront réservées à l'étude de la question B : *l'Enseignement des Mathématiques aux élèves ingénieurs*.

**Matin, 9<sup>1</sup>/<sub>2</sub> h.** — *Séance de travail* consacrée à l'étude de la question B.

Rapport général de M. le Prof. Paul STÆCKEL (Heidelberg), sur les réponses reçues relativement à la question B.

Indications complémentaires fournies par les divers délégués.

Discussion.

**Après-midi, 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub> h.** — Discussion sur l'enseignement mathématique dans les Ecoles d'ingénieurs.

**Soir, 9 h.** — Séance de la Société des Ingénieurs civils de France, 19, rue Blanche.

#### SAMEDI 4 AVRIL.

**Matin, 9<sup>1</sup>/<sub>2</sub> h.** — Continuation des discussions sur les questions A et B.

Présentation par les rapporteurs-généraux, MM. les Prof. BEKE et STÆCKEL, de résumés et de conclusions sur les questions A et B.

**Après-midi, 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub> h.** — Séance des délégués : Les travaux futurs de la Commission.

Les délégués seront appelés à examiner les grandes lignes du programme de la Réunion que la Commission tiendra en 1915 à Munich, et dont l'objet principal sera la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques des divers degrés de l'enseignement.

**Soir, 9<sup>1</sup>/<sub>2</sub> h.** — Réception chez S. A. le prince Bonaparte, membre de l'Institut, 10, avenue d'Iéna.

## ADMISSION AUX SÉANCES.

La séance générale d'ouverture est publique.

Les séances de travail sont réservées : 1° aux membres de la Commission et des Sous-commissions nationales ; 2° aux personnes munies d'une carte de participant. Cette carte peut être obtenue auprès du secrétaire-général par l'intermédiaire des membres de la Commission.

Les *adhésions* sont reçues, dès maintenant jusqu'au 1<sup>er</sup> mars 1914, auprès du secrétaire-général, M. le Prof. H. FEHR, 110, Florissant, Genève (Suisse).

## RÉUNION ORGANISÉE PAR LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHILOSOPHIE.

La Société française de Philosophie, d'accord avec les Editeurs de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques, convie les Mathématiciens réunis à Paris à l'occasion de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique à un certain nombre de séances où l'on étudiera et discutera diverses questions de philosophie mathématique.

Ces séances auront lieu à la Sorbonne les *lundi 6 avril, mardi 7 avril et mercredi 8 avril*. Elles seront consacrées à la lecture de Rapports sur des sujets choisis d'avance. Des séances seront spécialement réservées à des entretiens et discussions sur les principaux sujets mis à l'ordre du jour.

## Commission internationale de l'enseignement mathématique.

DÉLÉGATION FRANÇAISE. — A la suite du décès de notre regretté collègue C. BOURLET et de la démission, pour raisons d'âge et de santé, de M. DE SAINT-GERMAIN et de M. LAISANT, le Comité central a fait appel à M. BIOCHE, qui avait déjà pris une part très active aux travaux de la Commission, et à MM. HADAMARD et d'OCAGNE. La nouvelle délégation française se compose donc de MM. Ch. BIOCHE, prof. au Lycée Louis-le-Grand ; J. HADAMARD, membre de l'Institut, prof. au Collège de France et à l'École polytechnique ; d'OCAGNE, prof. à l'École polytechnique et à l'École des Ponts-et-Chaussées.

Le Comité central tient à renouveler ici l'expression de sa profonde gratitude à MM. DE SAINT-GERMAIN et LAISANT pour le concours très précieux qu'ils ont apporté à la Commission dès sa fondation, il y a cinq ans.

DÉLÉGATION RUSSE. — Nous avons le regret d'annoncer le décès de M. Ch. Vogt, membre de la délégation russe. M. le Ministre

de l'Instruction Publique a désigné comme successeur M. C. Possé, professeur émérite de l'Université de Saint-Pétersbourg, auteur du Rapport sur l'enseignement mathématique dans les universités et les écoles techniques supérieures russes.

COMITÉ CENTRAL. — Dans sa réunion de Heidelberg (21-23 juillet 1913), le Comité central a décidé de porter de 4 à 7 le nombre de ses membres. Il a estimé, en effet, qu'à la veille des réunions qui auront lieu à Paris en 1914 et à Munich en 1915, il convenait de compléter le Comité, afin de faciliter les suppléances lorsque l'un ou l'autre des membres se trouverait empêché de prendre part à l'un des Congrès.

Le choix du Comité central s'était porté sur M. P. APPELL, membre de l'Institut, Paris, M. G. CASTELNUOVO, professeur à l'Université de Rome et M. E. CZUBER, professeur à l'École technique supérieure de Vienne, qui, par leur situation et leurs connaissances des choses de l'enseignement sont tout particulièrement qualifiés pour participer à la direction des travaux et des séances de la Commission. Toutefois, en ce moment, les nombreuses occupations de M. APPELL, notamment ses fonctions de Doyen de la Faculté des Sciences de Paris et sa présidence, en 1914, de l'Institut et de l'Académie des Sciences, ne lui ont pas permis d'accepter cette invitation. Le Comité central s'est alors adressé à M. HADAMARD, membre de l'Institut, qui a bien voulu promettre son concours.

Le Comité central se compose donc actuellement de MM. les professeurs F. KLEIN (Gœttingue), *président*; Sir George GREENHILL et Dav.-Eug. SMITH (New-York), *vice-présidents*; H. FEHR (Genève), *secrétaire-général*; G. CASTELNUOVO (Rome), E. CZUBER (Vienne) et J. HADAMARD (Paris).

Le secrétaire-général de la Commission :  
H. FEHR.

### Conférences et Exposition annuelle de la Société française de Physique.

Les mercredi 15, jeudi 16 et vendredi 17 avril, auront lieu à Paris les Conférences et l'Exposition annuelle organisées par la Société française de Physique. Ces conférences sont faites, en partie par des professeurs français, en partie par des professeurs d'universités étrangères, sur des sujets d'actualité. L'Exposition a pour but de faire connaître des appareils récents soit pour des recherches scientifiques, soit pour l'enseignement.

### Congrès des Sociétés savantes françaises.

Le 52<sup>e</sup> Congrès des Sociétés savantes de Paris et des départements s'ouvrira le 14 avril 1914, à 2 h. de l'après-midi, à la Sorbonne; il se terminera le samedi 18 par une séance que présidera M. le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts.

### 3<sup>me</sup> Congrès des Mathématiciens scandinaves.

*Christiania, septembre 1913.*

Les mathématiciens scandinaves se sont réunis à Christiania, du 3 au 6 septembre 1913, sous la présidence de M. le professeur STÖRMER. La séance d'ouverture a été consacrée à une conférence de M. le prof. L. SYLOW: « Sur les travaux et les projets d'Abel pendant la dernière période de sa vie, d'après les documents parus depuis l'édition des œuvres complètes publiées par Sylow et Sophus Lie. » Les séances, à raison de deux par jour, furent présidées successivement par MM. MITTAG LEFFLER, suppléant WIMAN; MM. N. NIELSEN, suppléant HEEGAARD; MM. FREDLHOM, suppléant VON KOCH; MM. LINDELÖF, suppléant SUNDMAN; MM. JUEL, suppléant JENSEN.

Nous donnons ci-après la liste des communications :

Prof. Niels NIELSEN : Sur quelques applications des nombres de Bernoulli à la théorie des nombres.

Prof. Anders WIMAN : La relation entre le module maximum et le plus grand terme d'une fonction analytique.

G. STRÖMBERG : Analyse de la courbe représentant la température à Stockholm 1894-1911.

Prof. MITTAG LEFFLER : Un théorème d'Abel et la série de Dirichlet.

Prof. HJELMSLEV : La géométrie de la réalité.

Prof. SUNDMAN : Sur un appareil pour trouver des perturbations spéciales.

D<sup>r</sup> STEFFENSEN : Représentation analytique des sommes dans la théorie des nombres.

Prof. NÖRLUND : Sur des séries de facultés.

D<sup>r</sup> VEGARD : L'action des champs de force de gravitation sur des solutions.

Prof. HEEGAARD : Contributions à la théorie des graphes.

Docent Marcel RIESZ : Sur les séries de Fourier.

Prof. PHRAGMEN : Remarques sur la conférence précédente.

J. L. W. V. JENSEN : Deux communications : L'une sur une formule dans la théorie des nombres et l'autre sur les racines des équations algébriques.

Prof. C. JUEL : Sur des surfaces toroïdes du quatrième ordre non algébriques.

Prof. BJERKNES : Sur le traitement mathématique des problèmes météorologiques.

Prof. HJELMSLEV : Expériences géométriques.

- M. Th. SKOLEM : Sur la constitution des groupes du calcul identique.  
 Aktuar PALMSTRÖM : Calcul des rentes d'invalidité dans l'assurance sociale.  
 Prof. JOHANSSON : Sur la représentation des potentiels automorphes.  
 Aktuar HOLTSMARK : Sur le calcul des rentes viagères sur deux têtes.

### Société italienne pour l'avancement des sciences.

La « Societa italiana per il progresso delle scienze » a tenu son VII<sup>e</sup> Congrès à *Sienna* du 22 au 27 septembre dernier. Parmi les *conférences générales* se rapportant directement ou indirectement aux sciences mathématiques il y a lieu de signaler les suivantes :

- A. GARBASSO. Les principes de la mécanique.  
 S. LUSSANA. Sur la thermodynamique des gaz et des liquides.  
 E. MILLOSEVICH. Astronomie et chronologie historique.  
 C. PARVOPASSU. Progrès récents dans la science et dans la technique des constructions.  
 A. POCHETTINO. Phosphorescence et fluorescence : phénomènes et théories.  
 G. FOIA. L'actuaire et la science des actuaires.

Parmi les *travaux des sections*, nous mentionnons les communications de MM. :

- L. CONTI. Sur le régime uniforme dans les tuyaux de conduite.  
 F. ENRIQUES. Sur les conditions suffisantes dans le calcul des variations.  
 G. GIANFRANCESCHI. La déviation vers l'Est et vers le Sud dans la chute libre des corps pesants.  
 E. LAURA. Sur les distorsions de Volterra dans les solides de révolution.  
 F. LEVI-CIVITA. Sur le théorème de Torricelli.

### Société mathématique suisse.

*Réunion de Frauenfeld. 9 septembre 1913.*

La Société mathématique suisse a tenu sa 4<sup>e</sup> réunion ordinaire à Frauenfeld, le 9 septembre 1913, sous la présidence de M. le Prof. H. FEHR (Genève), comme section de la 96<sup>e</sup> réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles. La séance d'ouverture de la Section a été présidée par M. le D<sup>r</sup> K. MATTER Frauenfeld.

La *partie scientifique* comprenait onze communications dont deux, celles de MM. EINSTEIN et GROSSMANN, ont été présentées dans une séance commune avec la Société suisse de Physique.

1. — M. le Prof. L. CRELIER (Berne-Bienne). *Sur les correspondances en géométrie synthétique.* — Dans diverses notes parues dans l'*Enseignement mathématique* en 1906, 1907 et 1908, l'auteur a essayé d'étendre quelque peu la théorie géométrique des corres-

pondances  $(m.n)$ . En considérant principalement les correspondances  $(1.n)$ , il a pu simplifier et généraliser les résultats de Weyr et indiquer quelques constructions originales pour les cubiques à point double.

En continuant ses recherches, il a observé que l'emploi des correspondances  $(1.2)$  peut conduire à la construction des points d'inflexion et des tangentes d'inflexion dans les cubiques à point de rebroussement, ainsi qu'à la construction des tangentes et des points de rebroussement dans les courbes de 3<sup>me</sup> classe à tangente d'inflexion.

Dans ce cas, toutes les constructions sont réalisables avec la règle et le compas.

Le développement des constructions nécessaires peut être résumé dans la remarque dualistique suivante :

*Une cubique  $C^3$  à point de rebroussement  $S_2$  étant donnée par les points nécessaires, la ligne de jonction de  $S_2$  avec chaque point  $S_1$  est univoquement conjuguée avec la ligne de jonction de  $S_2$  avec le point de tangence de la tangente de  $C^3$  menée par  $S_1$ .*

*Ces droites forment deux faisceaux homographiques concentriques en  $S_2$  dont les rayons doubles sont la tangente de rebroussement et la droite passant par le point d'inflexion.*

*Une courbe de 3<sup>me</sup> classe  $K^3$  à tangentes d'inflexion  $P_2$  étant donnée par les éléments nécessaires, le point de coupe de  $P_2$  avec chaque tangente simple  $P_1$  est univoquement conjugué au point de coupe de  $P_2$  avec la tangente de  $K^3$  menée par le point d'intersection de  $P_1$  avec  $K^3$ .*

*Ces points forment deux ponctuelles homographiques sur la même base  $P_2$ ; les points doubles sont le point d'inflexion et le point de coupe de  $P_2$  avec la tangente de rebroussement.*

Les mêmes méthodes de recherche peuvent être appliquées aux cubiques crunodales et acnodales, ainsi qu'aux courbes de 3<sup>me</sup> classe à tangente double, avec points de tangence distincts ou imaginaires. Les constructions conservent la même valeur théorique, mais elles ne sont plus comme les précédentes, exclusivement réalisables par la règle et le compas. Elles nécessitent l'intersection d'une conique et d'un cercle dont un point commun est connu.

La remarque dualistique résumant les constructions prend la forme suivante :

*Une cubique  $C^3$  à point double  $S_2$  est donnée par les éléments nécessaires; la ligne de jonction de  $S_2$  avec chaque point  $S_1$  de la courbe est conjuguée aux deux lignes de jonction de  $S_2$  avec les*

*Une courbe de 3<sup>me</sup> classe  $K^3$  à tangente double  $P_2$  est donnée par les éléments nécessaires; le point de coupe de  $P_2$  avec chaque tangente simple  $P_1$  est conjugué aux deux points de coupe de  $P_2$*



points de tangence des deux tangentes de la courbe menées par  $S_1$  et rencontrant  $C^3$  en dehors de  $S_1$ .

Les droites considérées forment une correspondance (1.2) de rayons concentriques admettant un ou trois rayons doubles conjugués réels. Ceux-ci passent ensuite par les points d'inflexion de la courbe.

Le développement des détails de construction permet d'établir qu'un des éléments doubles conjugués seul est réel dans le cas des cubiques crunodales et dans celui des courbes de 3<sup>me</sup> classe dualistiques des cubiques crunodales.

Si le point double est isolé, ou si la tangente double est isolée, les éléments doubles conjugués des correspondances (1.2) sont tous les trois réels.

Le cas d'un seul élément double conjugué réel conduit à un intéressant groupement de triangles dans lesquels :

*Les paires de côtés homologues sont les éléments conjugués de trois involutions de rayons dont les sommets sont des points fixes.*

avec les tangentes de  $K^3$  menées par les points d'intersection de  $P_1$  avec  $K^3$ .

Les points considérés forment une correspondance (1.2) de base  $P_2$ ; les points doubles conjugués sont sur les tangentes par les points de rebroussement. Il y a un ou trois points doubles réels.

*Les paires de sommets homologues sont les éléments conjugués de trois involutions de points dont les bases sont des droites fixes.*

Les triangles sont liés involutivement dans chacune des constructions dualistiques.

*Les sommets des triangles sont sur trois coniques passant par un seul point commun.*

*Les côtés des triangles enveloppent trois coniques n'admettant qu'une seule tangente commune.*

Une étude plus approfondie de ces triangles conduit à un très grand nombre de propriétés fort intéressantes.

Les involutions supérieures  $J_1^{m+1}$  ou  $J_n^{m+1}$  peuvent être établies au moyen des courbes engendrées par les correspondances (1.  $m$ ) ou ( $n$ .  $m - n + 1$ ).

$J_1^{m+1}$  s'obtient en coupant la courbe d'une correspondance (1.  $m$ ) par un faisceau de droites issues d'un point extérieur et en joignant les points de coupe avec le point multiple d'ordre  $m$ . Chaque rayon ainsi obtenu n'appartient qu'à un seul groupe de ( $m + 1$ ) rayons conjugués.

$J_2^{m+1}$  s'obtient en coupant la courbe d'une correspondance (1.  $m$ ) comme précédemment et en joignant les points de coupe avec un point multiple d'ordre  $m - 2$ . Chaque rayon appartient à deux groupes de  $m + 1$  rayons conjugués.

$J_2^{m+1}$  s'obtient également avec la courbe d'une correspondance  $(2.m - 1)$  coupée comme avant et en joignant chaque point de coupe avec le point multiple d'ordre  $m - 1$ , dont l'existence est certaine. Chaque rayon appartient aussi à deux groupes de  $m + 1$  rayons conjugués.

On voit de suite par cet aperçu que l'étude des involutions supérieures est liée à celle des correspondances analogues.

Pour les cas faciles (1.1), (1.2), (1.3), (2.3), l'étude géométrique est relativement simple et conduit aisément aux propriétés des involutions  $J_1^2, J_1^3, J_2^3, J_1^4, J_2^4$  et  $J_3^4$ .

2. — M. le Prof. Dr R. FUETER (Carlsruhe), *Ueber algebraische Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe (Sur les équations algébriques de groupe donné)*. — Du grand problème de la détermination des équations algébriques ayant un groupe donné, le conférencier ne considère que le cas particulier où le groupe est donné par deux substitutions indépendantes

$$s^x S^y \quad (0 \leq x < 2, \quad 0 \leq y < l')$$

où  $s$  appartient à l'exposant 2 et  $S$  à l'exposant  $l'$ ,  $l'$  étant un nombre premier quelconque.

Du fait que les substitutions  $s^x S^y$  forment un groupe, résulte que

$$Ss = s^x S^y,$$

ou, à cause de  $s^{-1} = s$ ,

$$S = s^x S^y s.$$

Si l'on avait  $x = 0$ , il viendrait  $s = S^{y-1}$ , contrairement à l'hypothèse que  $s$  et  $S$  sont indépendants. On a donc  $x = 1$ , par suite

$$S = sS^y s = s \{sS^y s\}^y s.$$

Mais à cause de  $s^2 = 1$ , on déduit

$$\{sS^y s\}^2 = sS^y s \cdot sS^y s = sS^{2y} s, \quad \{sS^y s\}^y = sS^{y^2} s.$$

Par conséquent,

$$S = s \cdot sS^{y^2} s \cdot s = S^{y^2}$$

d'où

$$y^2 \equiv 1 \pmod{l'}.$$

Lorsque  $l'$  est impair, on a  $y \equiv \pm 1 \pmod{l'}$ . Au cas  $y \equiv +1 \pmod{l'}$  correspondent des corps de la division du cercle, au cas

$y \equiv -1 \pmod{l''}$  des corps de la multiplication complexe. Lorsque par contre  $l = 2$ , en plus des solutions  $y \equiv \pm 1 \pmod{2^r}$ , il y a encore les solutions

$$y \equiv \pm 1 + 2^{r-1} \pmod{2^r}, \quad (r > 2)$$

Nous savons que les premières solutions conduisent encore aux corps de la division du cercle et aux corps des modules singuliers; nous pouvons nous demander s'il existe des corps relatifs aux solutions du second cas. La réponse est affirmative. Le conférencier le montre dans le cas  $r = 3$ . Si l'on prend en effet  $x = i = \sqrt{-1}$ ,  $y = \sqrt[8]{2}$ ,  $x$  appartient à un groupe  $s$  tel que  $s^2 = 1$ . Formant ensuite le corps  $K(i, \sqrt[8]{2})$ , on peut, puisque  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$  est une racine huitième de l'unité, exprimer de la manière suivante les conjugués de  $y$ .

$$\begin{array}{lll} y_1 = \sqrt[8]{2} = y, & \text{on lorsque } S = \left( \rho \left| \frac{1+i}{\rho^3} \right. \right), & \gamma_1 = y \\ y_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt[8]{2} = \frac{1+i}{\rho^3} & \text{''} & \gamma_2 = S y \\ y_3 = -i \sqrt[8]{2} = -iy & \text{''} & \gamma_3 = S^2 y \\ y_4 = -i \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt[8]{2} = -i \frac{1+i}{\rho^3} & \text{''} & \gamma_4 = S^3 y \\ y_5 = -y & \text{''} & \gamma_5 = S^4 y \\ y_6 = -\frac{1+i}{\rho^3} & \text{''} & \gamma_6 = S^5 y \\ y_7 = iy & \text{''} & \gamma_7 = S^6 y \\ y_8 = i \frac{1+i}{\rho^3} & \text{''} & \gamma_8 = S^7 y \\ & & S^8 = 1 \end{array}$$

Par suite  $s^x S^y$  est le groupe de Galois du corps  $K$  et à cause de

$$s S y = s \frac{1+i}{\rho^3} = \frac{1-i}{\rho^3} = y_4 = S^3 s y$$

on a  $s S = S^3 s$ , où  $3 \equiv -1 + 2^2 \pmod{8}$ .

3. — M. le Prof. Gustave DUMAS (Lausanne), *Sur les singularités des surfaces*. — M. G. Dumas donne, en grands traits, un aperçu général de sa méthode de résolution des singularités des surfaces

analytiques dans le voisinage d'un point donné. Faisant un parallèle entre la théorie des courbes et celle des surfaces, il en signale les analogies et les différences et montre comment se posent les problèmes dans le dernier de ces deux cas.

4. — M. le Dr A. SPEISER (Strasbourg). *Ueber die Zerlegung der algebraischen Formen (Sur la décomposition des formes algébriques)*. — La notion de *composition* des formes quadratiques binaires occupe une place centrale dans la théorie que donne Gauss de ces formes. Cette notion est susceptible d'une généralisation encore plus grande que celle que lui donne la théorie des nombres algébriques.

Nous dirons que la forme  $f(x_1, \dots, x_m)$  est composable avec elle-même, lorsque l'équation

$$f(z_1, \dots, z_m) = f(x_1, \dots, x_m) f(y_1, \dots, y_m)$$

se transforme en identité au moyen de la substitution bilinéaire à coefficients rationnels

$$z_l = \sum_i \sum_k a_{ikl} x_i y_k \quad (S)$$

Si la forme  $f$  est indécomposable dans le domaine des nombres rationnels, on obtient des nombres généralisés (hypercomplexes) en définissant des nombres  $e_1, \dots, e_m$  ayant la propriété de rendre identiques les deux membres de l'équation

$$e_1 z_1 + \dots + e_m z_m = (e_1 x_1 + \dots + e_m x_m) (e_1 y_1 + \dots + e_m y_m)$$

lorsque les  $z_l$  sont exprimés au moyen de la substitution (S). Il faut pour cela que les nombres  $e_1, \dots, e_m$  vérifient les équations

$$e_i e_k = \sum_l a_{ikl} e_l.$$

Lorsque cette multiplication est *associative* et *commutative*, le domaine des nombres  $e_1 x_1 + \dots + e_m x_m$ , dans lequel  $x_1, \dots, x_m$  sont des valeurs rationnelles quelconques, se réduit à des domaines holoédrique-isomorphes à certains corps algébriques et à leurs conjugués.

Lorsque la multiplication n'est qu'*associative*, on obtient des nombres hypercomplexes. Certaines formes quaternaires donnent naissance de cette manière à de nouvelles classes de nombres, telles que les quaternions dont l'arithmétique a été donnée par M. Hurwitz. C'est une image de l'arithmétique des formes quaternaires correspondantes.

Remarquons encore qu'une forme qui admet une composition, se décompose en deux facteurs dont l'un est  $e_1 x_1 + \dots e_m x_m$ .

De même, le *déterminant du groupe* admet une composition. Elle est à la base des profondes recherches de M. Frobenius; en particulier, la décomposition du système correspondant de nombres hypercomplexes en systèmes partiels, tels que le produit de deux nombres quelconques pris dans deux systèmes partiels différents soit nul, conduit aux caractères du groupe.

Dans tous les cas, on peut attacher à tout nombre hypercomplexe une *norme* telle que le produit des normes de deux nombres soit égal à la norme du produit.

5. — Prof. Dr L. BIEBERBACH (Bâle). *Eine neue Methode der konformen Abbildung (Une nouvelle méthode de représentation conforme)*. — Soit  $f(x)$  une fonction holomorphe dans un cercle de rayon  $R$ , de centre à l'origine; soit, de plus  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ . Donc

$$f(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \quad |x| < R.$$

Une telle fonction effectue la représentation conforme du cercle dans un domaine dont l'aire (intérieure) est donnée par l'expression  $\iint f' \bar{f}' dx d\bar{x}$ . L'intégrale double est étendue au cercle  $|x| \leq R$ ,  $x$  et  $\bar{x}$ ,  $\frac{df}{dx} = f'$  et  $\bar{f}'$  étant imaginaires conjugués. Si l'on pose  $x = r e^{i\varphi}$ , cette expression devient, après un calcul facile

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r f' \bar{f}' d\varphi = \pi R^2 + \frac{4a_2 \bar{a}_2 R^4}{4} + \frac{3^2 a_3 \bar{a}_3 R^6}{6} + \dots$$

$$+ \frac{n^2 a_n \bar{a}_n R^{2n}}{2n} + \dots > \pi R^2.$$

Par conséquent: *La représentation conforme d'un cercle par une fonction  $f(x)$ , holomorphe à l'intérieur de ce cercle, telle que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ , donne un domaine d'aire plus grande.* Par suite, si l'on considère la représentation conforme d'un domaine donné sur un cercle qui laisse fixe un point de ce domaine et dont le module d'agrandissement en ce point fixe est égal à 1, la fonction qui effectue cette représentation est caractérisée comme solution du problème: rendre minimum l'expression  $\iint f' \bar{f}' dx d\bar{x}$ .

L'application de ce principe permet de démontrer très élémentairement la possibilité de la représentation conforme d'un domaine simplement connexe quelconque sur un cercle. Après avoir donné une démonstration très courte d'un théorème de Carathéodory sur la continuité de la variation de la fonction caractéristique de la représentation conforme lorsque le domaine se déforme

d'une manière continue (cette démonstration repose sur une remarque relative à la convergence des fonctions inverses d'une suite convergente de fonctions analytiques), le conférencier expose un procédé de calcul très simple pour la détermination effective de la fonction effectuant la représentation conforme. Ce procédé, par exemple, est applicable aux domaines dont l'ensemble complémentaire forme lui-même un domaine, ayant même frontière. Il consiste à approcher la fonction cherchée par le polynôme de degré  $n$  qui, parmi tous les polynômes du même degré, donne au domaine la plus petite aire ( $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ). Le calcul de ces polynômes déterminés univoquement conduit chaque fois à la résolution d'un système d'équations linéaires, à déterminant  $\neq 0$ .

6. — D<sup>r</sup> E. MARCHAND (Zurich). *Sur la règle de Newton, dans la théorie des équations algébriques.* — Newton a publié, dans son « *Arithmetica universalis* » (1707), une règle pour la détermination du nombre des racines positives, négatives et imaginaires d'une équation algébrique à coefficients réels, qui permet de préciser les résultats obtenus par l'application de la règle des signes de Descartes. Newton n'a pas jugé à propos d'en donner la démonstration. C'est à Sylvester (1865) que revient l'honneur d'avoir trouvé le principe d'une démonstration, en même temps qu'une généralisation<sup>1</sup>.

Les travaux de Newton et de Sylvester, ainsi que leur exposé dans les traités d'algèbre supérieure de Petersen<sup>2</sup> et de H. Weber<sup>3</sup>, renferment bien des lacunes que j'ai essayé de combler, sur le conseil de M. le Prof. D<sup>r</sup> Hurwitz. Il s'agissait avant tout de trouver une démonstration *complète* de la règle de Newton, démonstration qui embrasse tous les cas possibles.

Voici l'énoncé que je propose pour la *règle de Newton* :

Soit  $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ , une équation à coefficients réels du  $n^{\text{me}}$  degré ( $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$ ).

Formons la différence

$$A_i = \frac{i(n-i)}{(i+1)(n-i+1)} a_i^2 - a_{i-1} a_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, (n-1) .$$

et considérons, au point de vue des signes, la double suite (I) :

$$\left. \begin{array}{l} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \\ +, A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, + \end{array} \right\} \text{(I)} .$$

<sup>1</sup> J.-J. SYLVESTER, *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 24, 1871.

J.-J. SYLVESTER, *Philosophical Magazine*, 4<sup>me</sup> sér., vol. 31, p. 214.

<sup>2</sup> Jul. PETERSEN, *Theorie der algebraischen Gleichungen*, 1878, p. 203.

<sup>3</sup> Heinrich WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, 1895, t. 1, p. 304.

Désignons par

$\nu P$ , le nombre total des variations-permanences<sup>1</sup> de (I), par  
 $\dot{p}P$ , » » » permanences-permanences<sup>1</sup> de (I), et par  
 $V$ , » » » variations que présente la série

$$+, A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, +,$$

avec les conventions suivantes au sujet des zéros qui peuvent se présenter dans (I) :

1° Si  $a_{i-1} \neq 0$   $a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+i'-1} = 0$   $a_{i+i'} \neq 0$ ,  $i$  étant l'un des nombres  $1, 2, \dots, (n-1)$ , et  $i'$ , l'un des nombres  $1, 2, \dots, (n-i)$ , on donnera aux zéros représentant  $a_i, a_{i+i}, \dots, a_{i+i'-1}$ , le même signe que celui de  $a_{i-1}$ .

2° Si  $A_{k-1} \neq 0$   $A_k = A_{k+1} = \dots = A_{k+k'-1} = 0$   $A_{k+k'} \neq 0$ ,  $k$  étant l'un des nombres  $1, 2, \dots, (n-1)$  et  $k'$ , l'un des nombres  $1, 2, \dots, (n-k)$ , on donnera, en général,

au zéro représentant  $A_k$ , le signe contraire de celui de  $A_{k-1}$   
 » »  $A_{k+1}$ , le même signe que » »  $A_{k-1}$ ,

etc., en variant toujours les signes; sauf toutefois dans le cas où les  $a_k$  correspondants sont tels que

$$a_{k-1} \neq 0 \quad a_k = a_{k+1} = \dots = a_{k+k'-1} = 0 \quad a_{k+k'} \neq 0 \quad \text{et} \quad a_{k-1} \cdot a_{k+k'} < 0.$$

Il faut alors que le zéro représentant  $A_{k+k'-1}$  ait le même signe que  $A_{k+k'}$ .

Il y a encore un cas d'exception, celui où  $f(x) \equiv (x - \alpha)^n = 0$ ; dans ce cas  $A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = 0$ ; ces zéros-là doivent tous être considérés comme des quantités positives.

La règle de Newton s'exprime alors par les formules :

$$N_+ = \nu P - 2\lambda_1, \quad N_- = \dot{p}P - 2\lambda_2, \quad I = V + 2\lambda_3,$$

$N_+$ ,  $N_-$  et  $I$  désignant les nombres de racines positives, négatives et imaginaires de  $f(x) = 0$ , chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont des nombres entiers, non négatifs<sup>2</sup>.

7. — M. le Prof. F. RUDIO (Zurich). *Der Stand der Werke Leonard Euler. (Etat de la publication des Œuvres d'Euler)*. — M. Rudio présente les neuf volumes parus; il saisit cette occasion

<sup>1</sup> Voir H. WEBER, *loc. cit.*

<sup>2</sup> La démonstration complète de la règle de Newton paraîtra dans le *Bulletin de la Société neuchâteloise des Sciences naturelles*, t. 40; 1912-1913.

pour signaler à l'attention de ses collègues la Société Léonhard Euler destinée à fournir un appui financier au Comité de publication. La Commission Euler espère obtenir le concours des principales sociétés mathématiques.

8. — M. le D<sup>r</sup> D. MIRIMANOFF (Genève), *Sur quelques points de la théorie des ensembles*. (En l'absence de l'auteur, le mémoire est déposé sur le bureau de la présidence.) — M. Mirimanoff donne, en se bornant aux ensembles linéaires, une démonstration nouvelle du théorème de Cantor-Bendixson : tout ensemble fermé  $F$  se compose d'un ensemble dénombrable  $D$  et d'un ensemble parfait  $P$ . Cette démonstration peut être rapprochée de celles de W. H. Young, F. Bernstein, L. E. J. Brouwer dans lesquelles la partie dénombrable de  $F$  est détachée à l'aide d'un ensemble d'intervalles auxiliaires convenablement choisis. Les intervalles auxiliaires de M. Mirimanoff, qu'il appelle *crochets*, ont pour extrémités les milieux (ou des points intérieurs quelconques) des intervalles contigus à  $F$  et deux points arbitraires pris sur les demi-droites extérieures à  $F$ . (Ce mémoire sera inséré dans l'*Enseign. mathém.* du 15 janvier 1914. — *Réd.*)

9. — M. le Prof. D<sup>r</sup> W. H. YOUNG, F. R. S. (Liverpool et Genève). *L'intégrale de Stieltjes et sa généralisation*. — En l'absence de l'auteur, son mémoire est déposé sur le bureau de la présidence.

L'intégrale de Stieltjes est une limite formée de la même manière que l'intégrale d'une fonction continue. C'est la limite d'une somme de termes de la forme  $f(x_i) \Delta g(x_i)$ , ( $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$ ),  $g(x)$  étant une fonction non décroissante.

Lebesgue a montré que l'intégrale de Stieltjes se ramène à l'intégrale de Lebesgue d'une fonction bornée et il a indiqué la possibilité de prolonger l'opération de l'intégrale de Stieltjes à tout le champ des fonctions continues. Il se sert pour cela d'un changement de variable élégant, mais d'application difficile. Il remarque encore que procéder d'une autre manière à cette extension ne lui paraît guère possible.

Cette dernière remarque ne paraît pas fondée pour celui qui examine la théorie de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée, telle que la développe M. Young. Cette théorie n'exige pas la connaissance des théories modernes de l'intégration, mais procède uniquement par la considération de suites monotones de fonctions. Le principe est le suivant :

*On dira qu'une fonction  $f(x)$  possède une intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante  $g(x)$ , si elle peut s'exprimer comme limite d'une suite monotone de fonctions  $f_1, f_2, \dots$  dont les intégrales par rapport à  $g(x)$  sont déjà définies, pourvu que la limite*



des intégrales de toute suite ayant ces propriétés soit la même et ait une valeur finie. Cette limite s'appelle l'intégrale de  $f(x)$  par rapport à  $g(x)$ .

En partant de fonctions constantes à l'intérieur (au sens étroit) d'un nombre fini d'intervalles, on obtient au moyen de suites monotones de fonctions des fonctions de classe  $l$ ,  $u$ ,  $lu$ ,  $ul$ ,  $lul$ ,  $ulu$ , ... etc, ... et des fonctions qui n'appartiennent à aucune de ces classes. Après avoir démontré l'unicité du problème d'intégration pour les fonctions de classes  $l$ ,  $u$ ,  $lu$  et  $ul$ , on se sert ensuite du théorème suivant :

*Etant donnée une fonction  $f(x)$ , bornée et représentable analytiquement, on peut trouver une fonction  $lu$  qui ne dépasse pas  $f(x)$  et une fonction  $ul$  qui n'est pas moindre que  $f(x)$ , ces deux fonctions auxiliaires ayant la même intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante  $g(x)$ .*

Par conséquent, toute fonction bornée représentable analytiquement a une intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante. L'extension aux fonctions non bornées se fait sans nouvelles difficultés et le passage à l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée est immédiat.

Un exemple de l'utilité de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée nous est donné dans la théorie des séries trigonométriques. De même que l'intégrale de Lebesgue a élargi le champ des séries trigonométriques maniabiles en étendant la signification de l'expression *série de Fourier*, l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée a permis à M. Young d'agrandir encore plus ce champ en remplaçant la classe des séries de Fourier par la classe plus étendue des séries obtenues par dérivation terme à terme des séries de Fourier des fonctions à variation bornée. Parmi les propriétés des séries de Fourier qui restent vraies pour cette classe plus étendue, M. Young en cite deux : 1° les coefficients d'une série impaire (paire) de cette classe, introduits comme multiplicateurs dans une série de Fourier (dans sa série alliée), engendrent la série de Fourier d'une fonction de même sommabilité que celle de la fonction associée à la première série de Fourier ; 2° une telle série converge (C1) ou (C $\delta$ ) ( $0 < \delta < 1$ ) presque partout vers la dérivée de la fonction à variation bornée attachée à cette série.

Le mémoire se termine par une démonstration en quelques lignes n'employant que des théorèmes bien connus d'un résultat, établi jadis par M. Young au moyen d'un raisonnement long et difficile faisant usage du changement de variable indiqué par Lebesgue.

10. — M. le Prof. D<sup>r</sup> A. EINSTEIN (Zurich). *Physikalische Grundlagen und leitende Gedanken für eine Gravitations-theorie (Base*

*physique et idées directrices d'une Théorie de la Gravitation*). — Une des lois naturelles les plus remarquables et le plus exactement vérifiée est celle de l'identité de la masse inerte et pesante des corps, elle exprime que l'accélération de chute dans un champ de pesanteur est indépendante du matériel constituant le corps qui tombe. La conception que dans un système de référence accéléré, les phénomènes se produisent comme dans un champ de gravitation, est voisine de cette loi.

Cette conception (Hypothèse de l'Équivalence) fournit un moyen de déduire théoriquement les propriétés du champ de la pesanteur. Le principal résultat ainsi obtenu est la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation; pour un rayon passant à côté du soleil, la déviation est de  $0",84$ , elle est donc susceptible d'observation.

Ce résultat ne concorde pas avec l'état actuel de la théorie de la Relativité, parce qu'il établit que la vitesse de la lumière dans le vide dépend du potentiel de gravitation.

J'ai montré, avec M. Grossmann, qu'on peut généraliser la théorie de la relativité au point de rester en concordance avec cette hypothèse d'équivalence<sup>1</sup>.

D'après cette théorie, le champ de gravitation est défini par un « tenseur » symétrique ( $g_{\mu\nu}$ ) avec 10 composantes.

Au lieu de l'élément de ligne

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 ,$$

c'est l'expression plus générale

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}$$

qui intervient comme invariant fondamental.

Les relations du calcul vectoriel à 4 dimensions se transforment en celles du calcul différentiel absolu.

D'après cette généralisation, tout système d'équations physiques contient l'influence que le champ de gravitation exerce sur les phénomènes correspondants à ce système d'équations.

Ces équations généralisées sont généralement covariantes. En revanche, il paraît logiquement impossible de poser, pour déterminer le champ de gravitation (c'est-à-dire les  $g_{\mu\nu}$ ), des équations qui soient covariantes par rapport à des substitutions quelconques.

En partant des théorèmes de la conservation de l'impulsion et de l'énergie, nous parvenons à choisir le système de référence (auxquelles les coordonnées d'espace et de temps  $x, y, z$  et  $t$  se

<sup>1</sup> A. EINSTEIN u. M. GROSSMANN. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. — 1 broch. in-8°, 38 p.; B. G. Teubner, Leipzig. — *N. de la Réd.*

rappellent) de telle sorte que les équations ne sont plus covariantes que pour des substitutions linéaires, mais, au contraire de la théorie habituelle de la relativité, pour des substitutions linéaires quelconques <sup>1</sup>.

En soumettant le système de référence à cette restriction, nous obtenons des équations de gravitation entièrement déterminées et qui satisfont à toutes les conditions qu'on peut imposer à des équations de gravitation.

Il résulte, en particulier, de ces équations que l'inertie des corps n'est pas une propriété de chaque corps accéléré seulement, mais une action réciproque, c'est-à-dire une résistance à une accélération relative des corps par rapport aux autres corps. Cette conception a déjà été exposée par Mach et d'autres qui y arrivaient en se basant seulement sur la théorie de la connaissance.

11. — M. le Prof. Dr Marcel GROSSMANN (Zurich). *Mathematische Begriffsbildungen, Methoden und Probleme zur Gravitationstheorie. (Définitions, Méthodes et Problèmes mathématiques relatifs à la théorie de la Gravitation.)* — La formation des notions de l'analyse vectorielle générale constitue la seule difficulté mathématique à pénétrer dans la théorie d'Einstein sur la gravitation.

Si l'analyse vectorielle, auxiliaire indispensable de la physique théorique, ne se généralise que lentement, je pense que c'est parce que les physiciens n'établissent les théorèmes de l'analyse vectorielle que dans la mesure de leur application aux problèmes de physique qui en ont provoqué la découverte ou auxquels ils seront applicables.

Cette méthode, justifiée dans chaque cas particulier, ne saurait satisfaire les mathématiciens, ni susciter de notions générales.

Les mathématiciens, d'autre part, en introduisant les théories des quaternions et de Grassmann ont inutilement compliqué la compréhension de l'analyse vectorielle aux physiciens par des représentations abstraites qui n'étaient pas indispensables.

A ces difficultés s'ajoute la confusion babylonienne des termes et des signes qu'une commission internationale n'a pas réussi à corriger.

L'idée fondamentale de la théorie de la gravitation d'Einstein, qui est de caractériser un champ de gravitation par une forme différentielle quadratique à coefficients variables, nécessite une généralisation des définitions et des méthodes de l'analyse vectorielle, afin d'obtenir un aperçu plus distinct.

Le célèbre traité de CHRISTOFFEL, *Sur la transformation des*

<sup>1</sup> Le texte allemand de l'auteur dit : *derart zu wählen, dass nur mehr lineare, aber im Gegensatz zur gewöhnlichen Relativitätstheorie beliebige lineare Substitutionen die Gleichungen kovariant lassen.* — (Note du traducteur E. CHATELAIN.)

*expressions différentielles homogènes du deuxième degré*, 1869 (Journal f. Math. 70) et le travail trop peu remarqué de RICCI et de LEVI-CIVITA, 1901 (Math. Ann. 54) où les auteurs exposent une méthode pour donner aux équations différentielles de la physique une forme indépendante des coordonnées, sont, pour le sujet qui nous préoccupe, d'une importance fondamentale.

Le développement ultérieur de l'analyse vectorielle a mis en lumière les avantages qu'il y a à traiter cette branche au point de vue général de la théorie des invariants, puisque cette dernière intervient dans tout le système des notions de l'analyse vectorielle et du même coup marque la place naturelle des nouvelles conceptions introduites par MINKOWSKI, SOMMERFELD, LAUE, etc., dans le monde à quatre dimensions de la théorie de la relativité.

Il ne saurait être question ici de développer l'application des méthodes de la théorie des invariants à l'analyse vectorielle, je me bornerai à montrer la différence des méthodes sur les notions et les théorèmes les plus simples de l'analyse vectorielle.

La définition même de vecteur manque souvent de précision et de généralité, elle n'est pas susceptible d'extension. En définissant le vecteur comme une grandeur dirigée, déterminée par ses composantes suivant trois directions rectangulaires, on se restreint sans nécessité à l'espace euclidien, le seul où « direction » ait un sens immédiat.

On obtient une meilleure définition en se représentant un vecteur variable en grandeur et en direction de point en point, c'est-à-dire un champ vectoriel.

Ses trois composantes

$$A_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

sont des fonctions du lieu, les transformations qu'elles subissent lors d'une rotation du système de coordonnées sont essentielles. Cette rotation est exprimée par une substitution orthogonale

$$x'_i = \sum_k p_{ik} x_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

dont la solution est :

$$x_i = \sum_k p_{ki} x'_k .$$

Nous dirons qu'un vecteur est déterminé par trois fonctions  $A_i(x_1, x_2, x_3)$  si elles se transforment comme les coordonnées elles-mêmes, donc si

$$A'_i = \sum_k p_{ki} A_k .$$

De sorte que les coordonnées rectangulaires sont elles-mêmes aussi composantes de vecteur, ainsi que leurs différentielles.

L'élément de ligne :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

est un invariant absolu, pour chaque vecteur

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

est aussi un « scalaire », c'est-à-dire un invariant absolu, savoir : le carré de la grandeur du vecteur.

Les opérations différentielles sont particulièrement importantes, la plus simple est la *divergence* du vecteur A

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

qui est un scalaire, ce qu'on peut prouver en effectuant la substitution orthogonale. On le montre habituellement en imaginant que le vecteur représente la vitesse dans le champ du courant d'un liquide incompressible. Dans un espace fini S, limité par une surface  $\sigma$  se trouvent des points où le liquide entre et d'autres où il sort. Si l'on calcule la quantité de liquide qui traverse la surface dans l'unité de temps on trouve

$$\int_{\sigma} A_k d\sigma = \int_S \operatorname{div} A dS$$

et l'on a ainsi montré en appliquant le théorème de l'intégrale de Gauss que la divergence est indépendante du système de coordonnées : que c'est un scalaire.

En concentrant le domaine S en un point, on peut obtenir la divergence comme limite.

On peut déduire ces notions et d'autres encore d'une façon plus satisfaisante en abandonnant les coordonnées cartésiennes pour introduire des coordonnées curvilignes quelconques.

L'élément de ligne s'exprime alors par

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k .$$

Le caractère de généralité de cette forme différentielle quadratique permet de ne pas se préoccuper de ce que l'espace soit euclidien, non euclidien ou même à courbure variable.

Par une transformation de coordonnées :

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3) \quad i = 1, 2, 3$$

ou une transformation des différentielles

$$dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} dx'_k = \sum_k p_{ik} dx'_k$$

ou résolue

$$dx'_i = \sum_k \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_k \pi_{ki} dx_k$$

les coefficients de l'élément de ligne se transforment suivant les formules :

$$g'_{rs} = \sum_{ik} p_{ir} p_{ks} g_{ik} ,$$

si l'on suppose que l'élément de ligne est un scalaire.

Nous déterminons de nouveau un vecteur par trois fonctions  $A_i(x_1, x_2, x_3)$  qui se transforment suivant les formules

$$A'_i = \sum_k p_{ki} A_k$$

et nous constatons que les coordonnées ne constituent plus de vecteur, que leurs différentielles se transforment différemment, parce que les quotients différentiels partiels  $\pi_{ki}$  sont différents des  $p_{ki}$ . C'est pourquoi nous appellerons A : *vecteur covariant*. Les différentielles des coordonnées constituent, au contraire, un *vecteur contravariant*, nous constatons immédiatement l'utilité de ce dualisme.

Soient

$$A_1, A_2, A_3 \quad \text{et} \quad B_1, B_2, B_3$$

deux vecteurs variables, formons les grandeurs

$$T_{ik} = A_i B_k$$

qui se transforment de la manière suivante :

$$T'_{rs} = \sum_{ik} p_{ir} p_{ks} T_{ik} .$$

Un tel système de neuf grandeurs définit ce que nous appelons *tenseur covariant* de deuxième rang, puisque ses composantes sont caractérisées par deux indices. On voit que les coefficients de

l'élément de ligne constituant aussi un tenseur covariant de deuxième rang : le *tenseur fondamental*.

Soit

$$g = |g_{ik}|$$

le discriminant de la forme différentielle, c'est-à-dire le déterminant des neuf coefficients, les déterminants mineurs de deuxième ordre divisés par le déterminant lui-même, sont les composantes d'un tenseur contravariant de deuxième rang, leurs formules de transformation étant :

$$\gamma'_{rs} = \sum_{ik} \tau_{ir} \tau_{ks} \gamma_{ik} .$$

On peut définir, plus généralement, le tenseur covariant de rang  $\lambda$  par un système de fonctions  $T_{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$ , qui se transforment d'après les formules

$$T'_{r_1 r_2 \dots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \dots p_{i_\lambda r_\lambda} T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} .$$

De tels systèmes covariants, que nous appelons maintenant tenseurs, jouent un grand rôle dans la théorie de la transformation de CHRISTOFFEL qui a montré comment on peut passer d'un tenseur de rang  $\lambda$  à un autre de rang  $\lambda + 1$  par une seule opération de différentiation.

Interrompons ces considérations générales pour montrer comment on obtient la divergence du vecteur.

Soient  $A_1, A_2, A_3$  les composantes d'un vecteur covariant, le problème consiste à déduire du vecteur, par une différentiation, un scalaire, c'est-à-dire un invariant absolu. Dans ce but, formons d'abord, d'après CHRISTOFFEL, l'« extension » (Erweiterung) du vecteur, c'est-à-dire le tenseur covariant de deuxième rang

$$A_{rs} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \sum_{ik} \frac{1}{2} \gamma_{ik} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \right) A_k = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \sum_k \left\{ \begin{matrix} rs \\ k \end{matrix} \right\} A_k$$

puis le scalaire

$$\text{div } A = \sum_{rs} \gamma_{rs} A_{rs} ,$$

auquel on peut donner la forme

$$\text{div } A = \sum_{rs} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} (\sqrt{g} \gamma_{rs} A_r) .$$

Il en résulte, comme extension du vecteur, lorsque l'élément de ligne est euclidien

$$A_{rs} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s},$$

et comme divergence

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}.$$

Je prends encore, comme exemple, les notions de l'analyse vectorielle relatives au champ d'un scalaire.

Soit  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  un scalaire, alors

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3$$

en est aussi un. Comme les  $dx_i$  constituent un vecteur contravariant, il faut que les  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  forment un vecteur covariant que nous appellerons le *Gradient* de  $\varphi$ .

Comme carré de sa valeur nous avons le scalaire

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s},$$

c'est-à-dire le premier paramètre différentiel de BELTRAMI, qui, dans le cas de l'analyse vectorielle habituelle, devient le paramètre différentiel de LAMÉ

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^2.$$

D'après la formule générale citée plus haut, la divergence du gradient est

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \sum_{rs} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \sqrt{g} \gamma_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \right),$$

c'est-à-dire le deuxième paramètre différentiel de BELTRAMI, qui, dans le cas de l'analyse vectorielle habituelle devient

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}$$

c'est le deuxième paramètre différentiel de LAMÉ.

Nous voyons, d'après ces simples exemples la fécondité des méthodes employées, qui sont en outre complètement indépen-



dantes du nombre des variables. Je suis persuadé que les questions de notation de l'analyse vectorielle pourraient être résolues facilement sur le terrain de ces considérations générales.

12. — *Partie administrative.* M. H. FEHR, président, rappelle d'abord le souvenir du professeur H. WEBER (Strasbourg), membre honoraire, décédé au mois de juin dernier; puis il présente le rapport annuel. Sur la proposition des vérificateurs des comptes, la Société approuve le rapport du caissier. Le nombre des membres s'élève à 132.

Sur la proposition de son Comité, l'Assemblée décide d'adhérer à la *Société Léonhard Euler*; « elle engage ses membres et le public scientifique à s'associer aux efforts faits dans le monde entier pour élever un monument impérissable à l'un des plus illustres savants suisses. »

### Société Léonhard Euler.

La commission Euler de la Société helvétique des Sciences naturelles vient de créer, sous le nom de Société Léonhard Euler, une association destinée à fournir un appui financier à la publication des œuvres complètes d'Euler. Après une étude plus approfondie du plan et du prix de revient de cette vaste publication, la Commission a reconnu que les devis primitifs seront dépassés.

« Suivant un premier devis, dit la circulaire, l'édition complète des œuvres d'Euler devait comprendre 40 à 45 volumes, chiffre qui a servi de base pour le calcul des frais de publication. Ceux-ci, évalués à un demi-million de francs, semblaient couverts par des abonnements et des subventions volontaires.

« Neuf volumes ont paru jusqu'à ce jour. Ces volumes ont été accueillis avec une faveur marquée, grâce à la révision très soignée du texte et à leur belle impression. Par malheur, on a dû reconnaître que les frais de publication sont plus élevés qu'on ne l'avait prévu. Ainsi, malgré les 400 abonnements assurés (prix d'abonnement par volume 25 fr.) les 6 premiers volumes ont engendré un déficit de 45,000 fr. qui a dû être couvert par le fonds Euler. Ce fonds, constitué par les subventions de diverses autorités civiles, de sociétés scientifiques et par des dons de particuliers est déjà réduit à 84,000 fr. On a reconnu en outre qu'à moins de donner des dimensions inacceptables aux volumes, le nombre de ceux-ci, d'abord prévu, est insuffisant pour contenir les œuvres complètes de l'inépuisable savant. L'Académie de St-Petersbourg a mis à la disposition de la Commission Euler un grand nombre de manuscrits inédits; de tous côtés on retrouve des lettres d'Euler. A toutes ces causes d'amplification s'ajoute encore le fait

que les mémoires d'Euler déjà publiés occupent dans le texte nouveau, par suite des annotations indispensables de la Rédaction, une étendue sensiblement supérieure à ce qu'on avait admis à l'origine.

« Ces diverses causes ont eu pour effet de porter les frais de publication au double, à peu près, de la première évaluation, soit à environ un million de francs. Dans ces conditions, le déficit de la publication atteindrait probablement la somme de 200,000 fr. ; car les engagements pris ne permettent pas d'augmenter le prix des volumes destinés aux abonnés.

« Si la Commission Euler de la Société helvétique ne désespère pas de mener à bien son énorme entreprise, c'est qu'elle a la conviction profonde que son œuvre est vraiment grande et utile et qu'elle ne doute pas de trouver auprès de ses amis des ressources nouvelles pour l'exécuter intégralement.

« C'est dans cette conviction que nous avons décidé de créer, pour la durée de la publication des œuvres d'Euler (c'est-à-dire pour 15 ans environ), sous le nom de Société Léonhard Euler, une association dont les membres s'engageraient à payer une cotisation annuelle de 10 fr. au minimum. Les membres recevraient chaque année un rapport succinct sur la marche de la publication. Il leur sera offert, au cours de celle-ci, de bonnes épreuves des divers portraits d'Euler, en témoignage spécial de gratitude. »

*Les adhésions sont reçues auprès de M. E. HIS-SCHLUMBERGER, trésorier de la Commission Euler, Aeschenvorstadt, 15, Bâle.*

La Commission Euler espère obtenir l'appui d'un grand nombre de mathématiciens ; mais elle compte aussi sur le concours des sociétés scientifiques. Jusqu'ici elle a reçu, entre autres, les adhésions de la Société helvétique des sciences naturelles, de la Société mathématique suisse, de la Société suisse des professeurs de mathématiques et de la Société mathématique allemande.

#### Etats-Unis. — Thèses de Doctorat.

Pendant l'année universitaire 1912-1913, les Universités des Etats-Unis ont délivré 233 doctorats ès sciences, dont 21 concernant les sciences mathématiques. En voici la liste ; le nom de l'Université est indiqué entre parenthèses après celui de l'auteur.

D. F. BARROW (Harvard) : Oriented circles in space. — H. BATMAN (John Hopkins) : The quartic curve and its inscribed configurations. — E. T. BELL (Columbia) : The cyclotomic quinary quintic. — T. H. BROWN (Yale) : The effect of radiation on a small particle revolving about Jupiter. — Miss J. E. BURNS (Illinois) : The abstract definitions of the groups of degree eight. — G. R. CLEMENTS (Harvard) : Implicit functions defined by equations with

vanishing Jacobian. — C. W. COBB (Michigan) : The asymptotic development for a certain integral function of zero order. — Miss L. P. COPELAND (Pennsylvania) : On the theory of invariants of plane  $n$ -lines. — W. A. COIT (Boston) : Introduction to modern geometry. — W. H. CAMBLET (Yale) : On intermediate functions, being an extension of semi-continuous or upper and lower functions to a classification of discontinuous functions. — G. M. GREEN (Columbia) : Projective differential geometry of triple systems of surfaces. — R. A. JOHNSON (Harvard) : An analytic treatment of the conic as an element of space of three dimensions. — Miss F. P. LEWIS (John Hopkins) : A geometrical application of the theory of binary quintic. — C. E. LOVE (Michigan) : The asymptotic solutions of linear differential equations. — Miss M. L. SANDERSON (Chicago) : Formal modular invariants with an application to binary modular covariants. — F. SLEPIAN (Harvard) : On the functions of a complex variable defined by an ordinary differential equation of the first order and the first degree. — L. L. SMAIL (Columbia) : Some generalizations in the theory of summable divergent series. — W. H. STONE (Boston) : The elements of harmonic ratio. — L. E. WEAR (John Hopkins) : On self-dual plane curves of the fourth order. — K. P. WILLIAMS (Princeton) : The solutions of non-homogeneous linear difference equations and their asymptotic form. — H. W. WRIGHT (California).

#### Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

**Allemagne.** — M. KRAZER, prof. à l'École technique supérieure de Carlsruhe, a été nommé membre honoraire de la Société helvétique des sciences naturelles.

M. TOEPLITZ, professeur à l'Université de Goettingue, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Kiel.

**Etats-Unis.** — M. H. F. BLICHFELDT, prof. à l'University Stanford (Californie), est nommé professeur titulaire de mathématiques.

M. F. CAJORI, prof. au Colorado College, a été nommé docteur honoraire de l'Université de Colorado et docteur honoraire de l'Université de Wisconsin.

M. W. A. MANNING est nommé professeur adjoint de mathématiques appliquées à l'Université Stanford (Californie).

**France.** — L'Académie des Sciences a décerné les prix suivants : *Le Prix Poncelet* (3000 fr.) à M. Maurice LEBLANC, pour l'ensemble de ses recherches en mécanique ; — *le Prix Pontécoulant* (1500 fr.) à M. SÜNDMAN pour sa contribution au problème des trois corps ; — *le Prix Binoux* (2000 fr.) à M. J. MOLK, prof. à

l'Université de Nancy, pour les services rendus à l'édition française de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques.

L'Académie des Sciences morales et politiques a décerné le *Prix Le Dissez de Penanrun*, de 2000 fr. à M. BRUNSCHWIG, maître de conférence à la Sorbonne, auteur du livre : *Les Etapes de la philosophie mathématique*. Nous avons eu l'occasion d'attirer l'attention de nos lecteurs sur cet intéressant Ouvrage dans l'*Enseignement Mathématique* du 15 janvier 1913.

**Italie.** — La médaille (1910-1912) de la Société italienne des Sciences (dite des XL) a été décernée à M. Max ABRAHAM, professeur à l'Institut Technique Supérieur de Milan, pour ses récentes recherches tendant à relier la gravitation universelle à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques et lumineuses.

M. V. VOLTERRA, professeur à l'Université de Rome, a été nommé membre d'honneur de la Société Royale d'Edimbourg.

### Nécrologie.

M. Alexandre MACFARLANE, est décédé à Chatham le 28 août à l'âge de 62 ans. Il était d'origine écossaise et membre de la Société royale d'Edimbourg. Depuis de nombreuses années il s'était particulièrement attaché aux méthodes vectorielles suivant l'École d'Hamilton. Macfarlane était président de l'Association internationale pour l'étude des quaternions et des systèmes connexes.

M. C. G. ROCKWOOD, professeur à l'Université de Princeton, est décédé le 2 juillet à l'âge de 71 ans.

M. K. V. VOGT, Directeur de la deuxième Ecole réelle de Saint-Pétersbourg, membre de la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique, est décédé le 1<sup>er</sup> août.

M. J. G. WHITE, professeur à l'Université de Kentucky, est décédé le 18 juillet à l'âge de 67 ans.

H. VALENTINER. — Les mathématiciens danois viennent de perdre l'un de leurs doyens, M. Hermann Valentiner. Né le 8 mai 1850, il est décédé le 17 septembre 1913, à la suite d'une longue maladie. En 1881, une thèse sur « la théorie des courbes gauches » lui valut le grade de Docteur de l'Université de Copenhague. Après un court stage dans l'enseignement, il entra dans la direction d'une compagnie danoise d'assurance sur la vie.

Les circonstances le tinrent un peu à l'écart de la vie scientifique, mais les quelques mémoires qu'il publia témoignent d'une profonde connaissance des mathématiques. Nous citerons en particulier son « Mémoire sur la théorie des groupes finis de transformation », 1889.

Menant une vie très tranquille et retirée, Valentiner était apprécié par son entourage à la fois pour sa profonde érudition et pour son commerce agréable.