Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1913)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES SPIRALES LOGARITHMIQUES OSCULATRIGES A UNE COURBE PLANE

Autor: Turrière, É.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14854

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR
LES SPIRALES LOGARITHMIQUES OSCULATRICES A UNE COURBE PLANE

1. — La théorie des développoïdes des courbes planes permet de donner une définition géométrique simple des courbes décrites sur les rayons de courbure d'une courbe comme diamètres. Soit (C) la courbe plane considérée; soient M un point courant de cette courbe (C) et C_1 le centre de courbure de (C) associé à M. Une droite d issue de M et faisant avec la normale MC_1 un angle indépendant de la position de M sur la courbe (C) touche la développoïde (D) qu'elle enveloppe en un point D qui est la projection orthogonale de C_1 sur d. Le lieu des divers points D, ainsi associés à un même point M de (C) au moyen des droites d issues de ce point M, est donc la circonférence (Ω) de diamètre MC_1.

A chaque point M de la courbe (C) est ainsi associé un cercle (Ω) qui est tangent à (C) en M. Lorsque M se déplace sur (C), le cercle (Ω) enveloppe une courbe qui se décompose en la courbe (C) et en une nouvelle courbe (S); les points de contact M et S du cercle (Ω) avec les deux parties de son enveloppe sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la tangente au centre ω de (Ω) au lieu de ce point ω.

Je me propose d'indiquer ici une construction simple et une définition géométrique curieuse du point S.

2. — La courbe (C) est définie comme enveloppée par la droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ,$$

$\varpi(\varphi)$ étant une certaine fonction de l'angle φ; ϖ', ϖ'', ϖ''' représentent les dérivées successives de cette fonction par rapport à φ.

Les coordonnées de M sont

$$x = \varpi \cos \varphi - \varpi' \sin \varphi ,$$

$$y = \varpi \sin \varphi + \varpi' \cos \varphi ;$$

les axes coordonnés étant rectangulaires, celles du centre de courbure C_1 sont

$$x_1 = -\varpi' \sin\varphi - \varpi'' \cos\varphi \ ;$$

$$y_1 = \varpi' \cos\varphi - \varpi'' \sin\varphi \ ;$$

le centre ω du cercle (Ω) a donc pour coordonnées

$$\left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{\varpi - \varpi''}{2} \cos\varphi - \varpi' \sin\varphi \ , \\ y_0 &= \varpi' \cos\varphi + \frac{\varpi - \varpi''}{2} \sin\varphi \ ; \end{aligned} \right.$$

d'où résultent les expressions :

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = -\frac{1}{2}\Big[(\varpi + \varpi'') \sin\varphi + (\varpi' + \varpi''') \cos\varphi\Big] \ ,$$

$$\frac{dy_0}{d\varphi} = \frac{1}{2}\Big[(\varpi + \varpi'') \cos\varphi - (\varpi' + \varpi''') \sin\varphi\Big] \ ;$$

je poserai

$$R = -(\varpi + \varpi'') \ ,$$

R désignant un nombre algébrique dont la valeur absolue est le rayon de courbure de (C) ; les expressions précédentes deviennent

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = \frac{1}{2}(R \sin\varphi + R' \cos\varphi) \ ;$$

$$\frac{dy_0}{d\varphi} = \frac{1}{2}(-R \cos\varphi + R' \sin\varphi) \ ;$$

la droite MS a donc pour coefficients directeurs

$$R \cos\varphi - R' \sin\varphi \ , \qquad R \sin\varphi + R' \cos\varphi \ ,$$

et son équation est

$$X(R \sin\varphi + R' \cos\varphi) + Y(-R \cos\varphi + R' \sin\varphi) = \varpi R' - R\varpi' \ ;$$

elle passe par le centre de courbure C_2 de la développée (C_1) correspondant au point C_1 de cette développée : les coordonnées de C_2 sont, en effet, données par les équations

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = -\varpi'' \ ,$$

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi = -\varpi''' \ .$$

Ainsi donc pour obtenir le point S, *où le cercle* (Ω) *touche la se-*

conde partie de son enveloppe, il suffit de projeter orthogonalement le centre de courbure de C_1 *sur la droite* MC_2 *qui joint* M *au centre* C_2 *de courbure de la développée* (C_1).

3. — Supposons que la courbe (C) soit une développante de cercle; le point C_2 est alors un point fixe, centre de la développée (C_1) qui est un cercle; les points M et S sont inverses l'un de l'autre par rapport au cercle (C_1). La courbe (S) est donc la courbe inverse de la développante de cercle.

D'où il résulte que la courbe (S) *qui est associée à une développante de cercle est la spirale tractrice compliquée.*

4. — Proposons-nous de déterminer les cas où la courbe (S) dégénère en un point fixe. Soit O ce point fixe. Il faut que le cercle (Ω) passe par O.

Le rayon de ce cercle étant $\frac{R}{2}$, il résulte des expressions des coordonnées de son centre ω que la condition nécessaire et suffisante pour que le cercle (Ω) passe par un point fixe O est que la fonction ϖ de φ satisfasse à l'équation différentielle du second ordre

$$\varpi\varpi'' - \varpi'^2 = 0 \ ;$$

l'intégrale générale de cette équation est

$$\varpi = Ae^{m\varphi} \ ,$$

A et m étant deux constantes arbitraires.

Le seul cas de dégénérescence est donc celui pour lequel la courbe (C) *est la spirale logarithmique.*

Le point S est alors fixe et coïncide avec le pôle de la spirale logarithmique.

5. — La remarque précédente nous amène à donner une nouvelle définition géométrique de la courbe (S).

Les spirales logarithmiques du plan Oxy dépendent de quatre paramètres; en chaque point M d'une courbe (C) une spirale logarithmique (Σ) est osculatrice à (C); le contact entre les deux courbes est du troisième ordre; la courbe (C) n'est pas, en général, traversée par la spirale logarithmique.

Supposons la courbe rapportée à la tangente Mx et à la normale My au point M supposé non singulier; soit

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^3}{6P} + \dots$$

le développement en série de l'ordonnée de la courbe (C).

Les coordonnées de C_1 sont :

$$x_1 = 0 \ , \qquad y_1 = R \ ;$$

celles de C_2 sont

$$x_2 = \frac{R^3}{P} \qquad y_2 = R \ ;$$

le point S projection de C_1 sur la droite MC_2 a donc pour coordonnées :

$$a = \frac{R^3 P}{R^4 + P^2} \ , \qquad b = \frac{RP^2}{R^4 + P^2} \ .$$

Ces mêmes résultats découlent d'ailleurs des calculs du 2°; le centre C_1 est défini comme intersection de deux droites

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi - \varpi' = 0 \ ,$$

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi + \varpi'' = 0 \ ;$$

la droite $C_1 S$ a donc une équation de la forme

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi - \varpi' + \lambda(x \cos\varphi + y \sin\varphi + \varpi'') = 0 \ ;$$

cette droite devant être perpendiculaire à MC_2, on a

$$\lambda = \frac{R}{R'} \ ;$$

les coordonnées a, b du point S sont alors données par le système d'équations :

$$\left\{ \begin{aligned} a \cos\varphi + b \sin\varphi - \varpi &= \frac{R^3}{R^2 + R'^2} \ , \\ -a \sin\varphi + b \cos\varphi - \varpi' &= \frac{R^2 R'}{R^2 + R'^2} \ ; \end{aligned} \right.$$

en prenant O pour origine et la tangente pour axe des x, c'est-à-dire en posant

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \ , \qquad \varpi = 0 \ , \qquad \varpi' = 0 \ ,$$

on a

$$a = -\frac{R^2 R'}{R^2 + R'^2} \qquad b = \frac{R^3}{R^2 + R'^2} \ ;$$

ces expressions ne sont autres que celles qui ont été indiquées antérieurement, puisque P a pour expression

$$P = -\frac{R^3}{R'} \ .$$

Considérons d'autre part la spirale (Σ) osculatrice à (C) en M.

Désignons par S son pôle, par a et b les coordonnées de ce pôle; soit

$$\rho = \rho_0 e^{m\theta} ,$$

son équation par rapport à des axes issus du pôle S et parallèles aux axes (Mxy). En écrivant que la spirale passe par M et touche Mx, on obtient

$$m = -\frac{a}{b} ,$$

$$a^2 + b^2 = \rho_0^2 \exp.\left(2m \text{ arc tang } \frac{b}{a}\right) ;$$

l'équation de la spirale est donc

$$\frac{2a}{b} \text{ arc tang } \frac{bx - ay}{ax + by - a^2 - b^2} = \log \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2}{a^2 + b^2} ;$$

elle vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(ax + by - a^2 - b^2) + bx - ay = 0 ;$$

en dérivant cette équation deux fois, il vient pour $x = 0$, $y = 0$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0 , \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{b}{a^2 + b^2} , \qquad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = \frac{ab}{(a^2 + b^2)^2} ;$$

pour exprimer que les courbes (C) et (Σ) ont à l'origine un contact du second ordre, il suffit d'identifier ces expressions avec les suivantes :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{R} , \qquad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = \frac{1}{P} ;$$

on obtient ainsi les expressions de a et de b :

$$a = \frac{R^3 P}{R^4 + P^2} , \qquad b = \frac{RP^2}{R^4 + P^2} ;$$

elles sont identiques à celles que l'on avait obtenues pour les coordonnées de la projection de C_1 sur MC_2.

Le point S *de contact du cercle* (Ω) *avec son enveloppe est donc le pôle de la spirale logarithmique osculatrice en* M *à la courbe* (C).

La courbe (S) *enveloppe du cercle* (Ω) *est le lieu des pôles des spirales osculatrices à la courbe* (C).

Lorsque (C) est algébrique, cette courbe (S) est nécessairement algébrique puisque elle est l'enveloppe des cercles (Ω); si la courbe (C) est unicursale, il en est de même de la courbe (S). Il est remarquable de constater que des courbes transcendantes, les spirales logarithmiques osculatrices, permettent ainsi de faire correspondre une courbe algébrique à une courbe algébrique. Il

convient d'observer en outre que les courbes transcendantes osculatrices à des courbes données, algébriques ou non, n'ont donné lieu jusqu'ici à aucun mémoire. La théorie des *Spirales logarithmiques osculatrices à une courbe donnée* se présente cependant en Cinématique : la spirale logarithmique est en effet la courbe qui doit rouler sur une base rectiligne pour que son pôle engendre une roulette rectiligne ; ce cas se présente, en général, chaque fois qu'une base quelconque coupe la roulette imposée, elle-même quelconque. La roulette peut toujours être assimilée à une spirale logarithmique au voisinage du point d'intersection *(la spirale osculatrice)*, puisque les petits axes de la base et de la trajectoire imposée voisins du point d'intersection peuvent être remplacés par les éléments de tangentes aux deux courbes en ce point. (H. Bouasse et E. Turrière, *Exercices et compléments de Mathématiques générales*, § 263, p. 203.)

6. — Le cercle (Ω) enveloppe une courbe qui est constituée par l'ensemble des courbes (C) et (S). Peut-il y avoir réciprocité entre ces deux courbes ? en d'autres termes, la courbe (C) peut-elle correspondre à la courbe (S) comme celle-ci correspond à (C) ?

Pour qu'il y ait réciprocité entre les deux courbes, les points M et S étant homologues, il faut et il suffit que ω soit le milieu du rayon de courbure de la courbe (S). Il est donc nécessaire que les rayons de courbure en M et S de (C) et de (S) soient égaux.

Donnons-nous la courbe (ω) lieu du point ω ; soient x, y les coordonnées du point ω, s l'abscisse curviligne de ce point ; soient X, Y les coordonnées du point de contact M du cercle de centre ω et de rayon ρ avec son enveloppe ; je poserai

$$X = x + \rho \cos(\varphi + \zeta) ,$$
$$Y = y + \rho \sin(\varphi + \zeta) ,$$

φ étant l'angle qui repère la tangente de (ω) et ζ celui qui repère le point M sur la circonférence et par rapport à la tangente à (ω). Les coordonnées de (S) seront de la même forme à la seule différence que ζ sera changé en $-\zeta$. Ces angles ζ et $-\zeta$ sont donnés par l'équation

$$\cos\zeta = -\frac{d\rho}{ds} .$$

La droite ωM touche son enveloppe en C_1 tel que

$$\omega C_1 = \lambda_1 = -\frac{\sin\zeta}{\varphi' + \zeta'} ;$$

la droite ωS touche son enveloppe en C_2 tel que

$$\omega C_2 = \lambda_2 = +\frac{\sin\zeta}{\varphi' - \zeta'} ;$$

on doit écrire que λ_1 et λ_2 sont égaux, d'où $\varphi' = 0$: la courbe lieu de ω doit donc être une droite : les courbes (C) et (S) sont alors symétriques par rapport à cette droite et il est évident qu'il y a réciprocité entre elles. Quant à la nature de ces courbes, il suffit de remarquer que leur propriété caractéristique est que le rayon de courbure se trouve divisé en deux parties égales par une droite fixe ; d'après les propriétés des courbes de Ribaucour, les courbes (C) et (S) sont donc deux *cycloïdes ordinaires*.

Le résultat précédent peut être établi directement au moyen de considérations géométriques de la plus grande simplicité.

7. — La cycloïde intervient aussi dans la question suivante : *Déterminer la courbe* (C) *par la condition que la courbe* (S) *soit une ligne droite.*

Soit Ox la droite imposée ; elle est simultanément le lieu des points (S) et l'enveloppe des cercles (Ω) : on a donc

$$y + y_1 = R \ ;$$

on pourra soit former l'équation différentielle du second ordre

$$2yy'' = (1 + y'^2)(\sqrt{1 + y'^2} - 1)$$

qui s'intègre sans difficulté, soit former la relation

$$y = R \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

qui conduit à l'équation naturelle

$$R = (1 - \cos \varphi) \,.\, \text{constante}.$$

Quelle que soit la méthode suivie, les coordonnées x et y s'obtiennent sous les formes paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = b + a\left[-\theta + 2\sin\theta - \dfrac{\sin 2\theta}{2}\right] \\ y = a(1 - \cos\theta)^2 \ ; \end{cases}$$

cette courbe transcendante est une *développante de la cycloïde ordinaire* d'équations

$$\begin{cases} 2x_1 = \sin 2\theta - 2\theta \ , \\ 2y_1 = 1 - \cos 2\theta \ ; \end{cases}$$

on peut d'ailleurs démontrer directement, sans aucun calcul et par de simples considérations d'angles, que le segment C_1C_2 a son milieu sur Ox et que, par conséquent, la courbe (C_1) est la cycloïde ordinaire.

É. Turrière (Poitiers).