

ARITHMÉTIQUE GÉNÉRALE

Autor(en): **Dumont, Emile**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1913)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14855>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ARITHMÉTIQUE GÉNÉRALE

J'ai publié sous ce titre¹, en 1911, un livre dans lequel j'ai soutenu une thèse en complète opposition avec les idées qui ont aujourd'hui la vogue auprès des mathématiciens dans le domaine des nombres.

Depuis quelques dizaines d'années les Mathématiques ont été soumises à un travail considérable de critique et de revision, ayant pour but d'apporter plus de rigueur dans les fondements mêmes de la Science. Celle-ci est évidemment née du désir de l'homme d'étudier l'Univers, et de la nécessité pour lui de créer un instrument lui facilitant cette étude. Les premiers chercheurs ont créé cet instrument sans s'en rendre bien compte, en traçant sur le sable des figures représentant les corps de la nature. Les premiers rigoristes furent sans doute les Grecs qui essayèrent de définir les lignes dont ils se servaient avec un grand souci de précision. La Géométrie fut l'instrument de la Physique et de l'Astronomie ; l'Arithmétique fut l'instrument de la Géométrie.

Les modernes dans leur travail de revision et d'épuration se sont heurtés à des notions mal définies et à des faits indémontrés ; ils ont voulu définir les premières et démontrer les seconds ; mais, en Géométrie, au lieu de persévérer dans la voie indiquée par Leibniz, Gauss, Cauchy, qui cherchaient à donner une définition de la droite, figure idéale représentant l'image d'un fil parfaitement tendu, ils se sont arrêtés à un texte incompréhensible : une droite est une ligne homogène entièrement déterminée par deux quelconques de ses points *suffisamment rapprochés* (?)

En Arithmétique, ils ont créé des êtres de raison pure, auxquels ils ont donné le nom général de *nombres*, mais qui n'ont en commun que ce nom, et certaines règles dites *de calcul* suivant lesquelles il est permis de les combiner en vertu de conventions arbitraires. Ces nombres n'ont ainsi aucune signification philosophique, et cette arithmétique pompeusement appelée logique, n'est plus qu'un jeu conventionnel analogue au jeu d'échecs.

¹ Arithmétique générale. Nombres naturels, qualifiés, complexes, ternions et quaternions. — 1 vol. in-8°, XVII, 275 p.; 10 fr.; Hermann & fils, Paris.

En définitive, ce qui distingue la science moderne « logique » de la science ancienne « rationnelle », ce ne sont que les définitions, car les démonstrations des Grecs étaient souvent plus logiques, c'est-à-dire plus rigoureuses que bien des démonstrations de Legendre par exemple. Les définitions rationnelles sont des descriptions d'êtres idéaux, dits « géométriques », imaginés comme schèmes d'objets naturels ; ou des explications de concepts abstraits, conséquences de considérations relatives à ces êtres géométriques. Les définitions logiques sont des associations de mots et de symboles écrits, dont la création n'est pas explicable. De plus en plus, la science actuelle est nominaliste et formelle, et prétend se substituer à la science rationnelle et naturelle.

Les manuels classiques où la jeunesse puise ses premières connaissances scientifiques ont fait un compromis hybride entre les deux doctrines. Les notions fondamentales indispensables à tout enseignement sont rationnelles dans tout le domaine élémentaire ; et à mesure que l'étudiant s'élève dans la science, les notions nouvelles qu'on lui inculque prennent peu à peu la forme logicienne ou nominaliste. Ce qui fait qu'en fin de compte, arrivé à l'âge de raison, l'étudiant s'aperçoit que l'enseignement qu'il a reçu pendant les dernières années d'études a été en contradiction absolue avec ses connaissances premières.

A mon avis, il faut que, dès le début, on s'en tienne à une seule doctrine, qui soit définitive. Quand je dis, dès le début, je ne veux évidemment pas dire dès le berceau ; j'entends, dès l'instant que l'on expose à l'enfant des définitions, c'est-à-dire, dès qu'il est en état de comprendre et de raisonner juste.

Ainsi, l'arithmétique dite raisonnée devrait être enseignée en trois étapes : première année, les nombres entiers ; deuxième, les fractions ; troisième, les nombres incommensurables. Eh bien, si la théorie nominaliste est si merveilleuse, il faut qu'on l'enseigne, et que l'on dise aux jeunes gens de 14 ans : Un *nombre entier* est un signe d'écriture caractérisant la place qu'il occupe dans une suite de signes analogues, commençant par le caractère 1 et n'ayant pas de fin (DEDEKIND, VON HELMHOLTZ). On convient d'appeler *somme* des nombres entiers a et b le nombre entier qui correspond à b , si l'on fait correspondre 1 au nombre a' qui suit immédiatement a , 2 au nombre a'' qui suit immédiatement a' , etc., sans omission ni répétition ; on représente ce nombre par le symbole $a + b$. On appelle *produit* de a par b , la somme $a + a + a + \dots + a$ obtenue en remplaçant les nombres entiers de 1 à b inclusivement par des a séparés par des signes $+$; on représente ce nombre par le symbole $a \times b$ ou ab ; et ainsi de suite.

L'année suivante, on dira à ces jeunes gens qui auront 15 ans, une *fraction*, c'est un groupe (a, b) d'un nombre entier a et d'un

nombre entier b , auquel on associe l'ordre dans lequel on écrit ces nombres (TANNERY). On conviendra d'écrire $(a, b) = (c, d)$ si l'on a $a \times d = b \times c$.

On appelle *somme* de (a, b) et (c, d) le nombre $(ad + bc, bd)$; on appelle *produit* de ces nombres, le nombre (ac, bd) , et ainsi de suite.

Enfin, l'année suivante, on dira à ces mêmes jeunes gens, « toutes les fois qu'on a défini un moyen de ranger tous les nombres rationnels en deux¹ classes telles, que tout nombre de l'une soit moindre que tout nombre de l'autre, que dans la première il n'y ait aucun nombre plus grand que tous les autres nombres de la même classe, et dans la seconde aucun nombre moindre que tous les autres nombres de cette classe, on convient de dire qu'on a défini un *nombre incommensurable* (TANNERY). Si l'on désigne par x une variable à laquelle on puisse donner comme valeur numérique tout nombre de la première classe, et par y une variable à laquelle on puisse donner comme valeur numérique tout nombre de la seconde classe, on convient de représenter le nombre incommensurable ainsi défini par le symbole $x | y$ qui s'appelle une *coupure* entre les nombres x et les nombres y . Deux nombres $x | y$ et $u | v$ sont dits *égaux*, si l'on a $x < v$ et $u < y$.

On appelle *somme* de $x | y$ et $u | v$ le nombre $(x + u) | (y + v)$; on démontre que ce symbole représente effectivement une coupure entre $(x + u)$ et $(y + v)$.

On appelle *produit* de $x | y$ par $u | v$ le nombre $xu | yv$; on démontre que ce symbole représente effectivement une coupure entre $x.u$ et $y.v$, etc.

Si un professeur de l'enseignement secondaire se sent une foi suffisante pour enseigner ces théories, qu'il le fasse donc. Il aura bien mérité de la LOGIQUE!

Pour ma part, je ne saurais me résoudre à faire de toute cette phraséologie la nourriture intellectuelle de mes élèves.

Mais comme il faut pourtant bien leur donner un cours d'arithmétique raisonnée, je préfère leur définir le nombre entier en leur expliquant l'idée qu'il représente; et de même pour la fraction, et le nombre incommensurable.

C'est donc là l'objet de mon « Arithmétique générale ». J'y ai traité par la même méthode les nombres relatifs, c'est-à-dire les nombres qualifiés positifs et négatifs, les nombres complexes, et les quaternions.

Lorsque plusieurs définitions également rationnelles se sont offertes à moi pour un même concept, j'ai chaque fois choisi la plus générale, c'est-à-dire celle qui pouvait s'appliquer à toutes

¹ On aura soin de faire remarquer que ce mot *deux* et l'idée qu'il représente n'ont rien de commun avec le caractère 2 qui suit 1 dans la suite immédiate des nombres entiers.

les catégories de nombres, jusques et y compris les quaternions. Ceux-ci m'ont donc constamment servi de critérium et de guide, et leur étude, préparée ainsi graduellement par l'étude des nombres des catégories précédentes, n'offre plus aucune difficulté au lecteur attentif.

La géométrie ayant historiquement et rationnellement servi de point de départ à l'arithmétique, c'est de la considération des grandeurs géométriques que j'ai tiré le concept de nombre. Pour des raisons que je ne veux pas discuter ici je n'ai considéré que la géométrie euclidienne.

Chacun sait exactement ou approximativement ce que l'on entend par mesurer une grandeur géométrique. Pour que cette opération soit possible, il faut que la grandeur à mesurer et l'étalon choisi pour la mesurer possèdent certaines propriétés que j'ai essayé de caractériser en définissant d'abord les grandeurs géométriques *homogènes*, puis les grandeurs *directement mesurables*. Telles qu'elles figurent dans mon livre, mes définitions sont sans doute fort abstraites, fort difficiles à comprendre. Mais comme ce sont principalement les objets qu'elles définissent qu'il importe de connaître pour saisir l'ensemble de ma méthode, je modifierai ici mon texte et je me bornerai à la définition suivante :

J'appelle *grandeur géométrique directement mesurable*, toute grandeur qui peut être engendrée par un élément géométrique animé d'un mouvement de translation, d'un mouvement de rotation, ou d'un mouvement hélicoïdal.

L'élément générateur, dans ses positions initiale et finale, détermine les extrémités de la grandeur. Toutes les grandeurs qui ne diffèrent que par l'amplitude du mouvement de l'élément générateur constituent une *classe* de grandeurs directement mesurables.

J'admettrai dans un cours d'arithmétique, que toute grandeur directement mesurable est divisible en parties égales, appartenant à la même classe, et que plusieurs grandeurs d'une même classe peuvent être placées bout à bout sur une même figure illimitée, engendrée par l'élément mobile, de telle sorte que ces grandeurs puissent être engendrées successivement par le mouvement continu de l'élément générateur.

Des segments de droite, des arcs d'une même circonférence, des rectangles de même hauteur, des angles de demi-droites, des angles dièdres, des fuseaux d'une même sphère, des arcs d'hélice de même pas et sur le même cylindre circulaire droit, etc., sont de telles grandeurs.

Les points que j'admets ici peuvent être démontrés dans un cours de géométrie, ou faire l'objet de postulats ; encore une fois, cela n'importe aucunement. Pour celui qui ne veut pas faire de l'arithmétique une science isolée, inutile au physicien, au géo-

mètre, à l'astronome, il n'y a aucun inconvénient à ce que les postulats de la géométrie (si postulats il y a) soient utilisés en arithmétique.

Ce n'est donc pas en acceptant ou en discutant les démonstrations que je donne de ces vérités dans mon livre, que l'on pourra conclure que ma théorie des nombres est à adopter ou à rejeter.

Cette remarque s'applique à toute la théorie des grandeurs directement mesurables ; théorie que j'ai établie minutieusement et dont deux des principaux points sont :

I. *Des grandeurs d'une même classe ne sauraient être équivalentes sans être identiques.*

II. *Si l'on fait croître une grandeur A à partir d'un état initial A_0 d'après une loi quelconque et si l'on constate qu'elle reste toujours moindre qu'une grandeur B déterminée de sa classe, on doit en conclure qu'elle a une limite C inférieure ou égale à B.*

Je définis la somme, l'inégalité, la différence des grandeurs ; ainsi que les limites de grandeurs variables.

Tout cela constitue un travail préliminaire assez long et assez ardu. Je l'ai scindé en plusieurs parties, suivant les besoins des différentes catégories de nombres. Il est clair que dans un cours classique fait à de jeunes élèves, on peut supprimer presque toute cette théorie, en renvoyant aux propriétés des segments de droite et des arcs de circonférence, quitte à introduire ensuite graduellement, par des exemples occasionnels, les grandeurs moins simples qui se présenteront en géométrie.

Dans tout ce qui suit je ne parlerai que de grandeurs directement mesurables.

Rapport de grandeurs. — Si l'on considère des grandeurs G_1 et G_2 d'une classe (G), j'appelle *rapport de G_2 à G_1 , la manière d'être de G_2 relativement à G_1* , et je représente cette notion par le symbole $\frac{G_2}{G_1}$.

(Cette conception du rapport est celle qu'en avait DUHAMEL. [Des méthodes dans les sciences de raisonnement, 2^e partie, p. 72]. Malheureusement, lorsque j'ai écrit mon livre, je n'avais pas lu Duhamel, et je n'ai donc pas employé cette locution : *manière d'être* relative. N'ayant pas la subtilité d'esprit de ce profond penseur, je n'ai pas établi de distinction entre le rapport et la mesure. Cette distinction est pourtant intéressante mais sans utilité pratique ainsi qu'on va le voir).

Cette manière d'être relative peut être *caractérisée* soit par les grandeurs G_1 et G_2 elles-mêmes, soit par une *loi de formation* de G_2 à l'aide de G_1 .

(Cette nouvelle expression n'est pas de moi non plus ; je l'ai trouvée dans le cours d'analyse de HOUËL qui s'en sert à propos des nombres).

Mesure d'une grandeur. — MESURER *une grandeur*, c'est la déterminer avec précision, et à divers points de vue, relativement à une grandeur de sa classe, connue ou spécifiée, que l'on appelle ÉTALON.

(Cette définition est presque textuellement de Joseph Bertrand).

La détermination en question est réalisée lorsqu'on connaît un traitement qui, appliqué à l'étalon, reproduit la grandeur mesurée.

(C'est ici qu'un critique allemand, M. Oskar Perron, de Tübingen, a songé à chauffer l'étalon, ce qui ne saurait être une froide plaisanterie).

La mesure d'une grandeur G_2 relativement à un étalon G_1 revient donc en définitive à la détermination d'une loi de formation de cette grandeur au moyen de l'étalon, laquelle loi de formation prend le nom de *mesure de G_2 relativement à G_1* , et se représente par le symbole

$$\text{mes}_{G_1} G_2 .$$

Nombre. — Dans le sens le plus général qu'il convient d'attribuer à ce mot dans la science mathématique, j'appelle *nombre*, toute loi de formation qui, appliquée à une grandeur d'une certaine classe G , produise une grandeur déterminée de la même classe.

C'est à une telle loi que se réduisent en fin de compte les concepts abstraits de rapport et de mesure de grandeurs.

Rien ne prouve à priori qu'à des grandeurs arbitraires G_1 et G_2 d'une même classe (G) il corresponde une loi de formation de G_2 à l'aide de G_1 ; cependant, dans certains cas simples, par exemple si G_2 est une somme de grandeurs égales à G_1 , une loi de formation apparaît à l'évidence.

D'un autre côté, si l'on suppose que l'on ait pu déterminer, au moyen des grandeurs G_1 et G_2 , une loi de formation de G_2 à l'aide de G_1 , rien ne prouve à priori, que la même loi, appliquée à une grandeur G_3 de la même classe (G) ou à une grandeur H_1 d'une autre classe (H), produit une grandeur déterminée G_4 ou H_2 de la même classe que la grandeur choisie. Rien ne permet même d'affirmer que cette loi sera applicable à d'autres grandeurs que G_1 ; et cependant, dans l'exemple particulier que j'ai cité plus haut, il apparaît encore à l'évidence qu'il en est ainsi. Rien ne s'oppose donc à ce que l'on établisse une théorie tout à fait générale, reposant sur l'existence des lois de formation et sur la possibilité d'appliquer ces lois à d'autres grandeurs que celles qui les ont fait découvrir; quitte à démontrer, chaque fois que l'on voudra utiliser cette théorie dans des circonstances déterminées, que les grandeurs considérées satisfont aux conditions requises.

Un nombre n'est donc pas à proprement parler un rapport de grandeurs, mais bien la loi de formation de l'une de ces gran-

deurs à l'aide de l'autre, *loi conçue indépendamment des grandeurs particulières qui lui ont donné naissance*. Si je ne devais pas craindre de m'exprimer d'une manière peut-être difficile à comprendre par de jeunes intelligences, je devrais dire :

Un nombre, c'est le *schème mental* (ou le concept schématique) de tout traitement qui, appliqué à une grandeur quelconque, mais déterminée d'une classe (G) en fait une grandeur déterminée de la même classe ¹.

Par la suite il est démontré que la connaissance des grandeurs G_2 et G_1 et par conséquent de leur manière d'être relative permet de caractériser celle-ci au moyen d'un nombre, ou loi de formation de G_2 à l'aide de G_1 ; ce nombre sera la mesure de G_2 relativement à G_1 ; on démontre également que la connaissance d'une grandeur G_1 et d'une loi de formation permet de déterminer une grandeur G_2 de la même classe, grandeur G_2 dont cette loi de formation, ou ce nombre, caractérise la manière d'être relativement à G_1 , et est la mesure relativement à G_1 .

Cela étant, et afin de simplifier le langage, on ne fait aucune distinction entre un rapport de grandeurs et le nombre qui lui correspond,

Mais il est bien certain que ce sont là deux concepts différents. Et lorsque l'on énonce une proportion, entre grandeurs, c'est bien de la manière d'être relative qu'il s'agit, ce qui explique les énoncés de théorèmes tels que celui-ci :

Deux angles au centre SONT ENTRE EUX COMME les arcs qu'ils interceptent sur des circonférences égales, décrites de leurs sommets pour centres.

Symboles représentatifs des nombres. — Le rapport d'une grandeur à une grandeur égale s'appelle *nombre un* ou *un* tout court. On le représente par le caractère 1.

Ecrire $\frac{G_2}{G_1} = 1$ est donc synonyme de $G_2 = G_1$.

On représente les nombres au moyen des symboles représentatifs des rapports de grandeurs, ou des mesures de grandeurs, ou bien encore au moyen de lettres minuscules, de lettres grecques, ou de caractères spéciaux ; ainsi une lettre a désigne un nombre, renseigné comme étant le rapport des grandeurs G_2 et G_1 , auquel cas ce symbole a remplace simplement les symboles

$$\frac{G_2}{G_1} \quad \text{ou} \quad \text{mes}_{G_1} G_2$$

et il indique un traitement qui appliqué à G_1 produit G_2 ; ou bien

¹ Pour employer la manière des logiciens nominalistes, on pourrait donner comme définition du nombre : *un groupe de grandeurs G_2 et G_1 d'une même classe, auquel on associe l'ordre dans lequel on les considère.*

ce symbole a indique par lui-même un traitement connu ou supposé tel, applicable à des grandeurs arbitraires ou soumises à certaines conditions, et produisant alors des grandeurs déterminées. Tels sont par exemple les symboles d'usage courant $4, \frac{3}{2}$, etc.

Nombres absolus, nombres relatifs. — Lorsque, dans la manière d'être de G_2 relativement à G_1 , et conséquemment aussi dans la loi de formation de G_2 à l'aide de G_1 , on ne tient compte que des grandeurs elles-mêmes, abstraction faite de toute autre considération, le rapport de G_2 à G_1 s'appelle un *nombre absolu*. Mais on peut aussi, dans leur manière d'être relative, et dans la loi de formation qui la caractérise, tenir compte des positions de G_2 et de G_1 ; dans ce cas leur rapport est appelé un *nombre relatif*. Et à ce dernier point de vue, on peut envisager la simple situation de G_2 relativement à G_1 , ce qui donnera les nombres qualifiés positifs et négatifs ou les nombres complexes binaires ($a + ib$); ou bien, on peut envisager en outre la situation de la figure constituée par le groupe $G_1 G_2$ dans un système de repère à trois dimensions; cette conception ultime et générale fournira les *quaternions*, et même les *biquaternions*¹.

Produit d'une grandeur par un nombre. — Une grandeur G_2 produite par l'application à une grandeur G_1 d'un traitement indiqué par le nombre a , s'appelle *produit de G_1 par a* . On la désigne par les symboles :

$$G_1 \times a \quad G_1 . a \quad G_1 a$$

et l'on écrit donc :

$$G_2 = G_1 . a . \quad (1)$$

On dit encore que G_2 s'obtient en *multipliant* G_1 par a .

Si a est le rapport des grandeurs H_2 et H_1 d'une classe (H), multiplier G_1 par $\frac{H_2}{H_1}$ c'est donc appliquer à G_1 le même traitement qui, appliqué à H_1 , produit H_2 . On a donc alors :

$$G_2 = G_1 \times \frac{H_2}{H_1} . \quad (2)$$

D'autre part, a peut maintenant se représenter par le symbole $\frac{G_2}{G_1}$ puisque, si l'on applique à G_1 le traitement indiqué par a on

¹ Je me suis trompé lorsque j'ai écrit dans mon avant-propos que les biquaternions ne sont pas des nombres. La faute en est aux vecteurs *équipollents*, et au manque d'ouvrages écrits en français sur ce sujet. J'aurai peut-être un jour le temps d'établir la théorie rationnelle des bi et tri-quaternions. Ce sera une cinquième partie à ajouter à mon livre.

obtient G_2 . Les symboles $\frac{G_2}{G_1}$ et $\frac{H_2}{H_1}$ désignent donc ici une même loi de formation, c'est-à-dire un seul et unique nombre. La relation (2) peut donc s'écrire

$$G_2 = G_1 \times \frac{G_2}{G_1} \quad (3)$$

ce que l'on exprime en disant que *le rapport des grandeurs G_2 et G_1 est un nombre par lequel, multipliant G_1 , on obtient G_2 .*

Nombres égaux. — Connaissant G_1 et G_2 , on peut mesurer directement G_2 au moyen de G_1 , et concevoir un nombre $\frac{G_2}{G_1}$ obtenu par une méthode de mesure qui n'est pas nécessairement la même que la méthode ayant fourni $\frac{H_2}{H_1}$ ou a . Si nous désignons par b ce nombre nous pouvons écrire les identités :

$$G_2 = G_1 \cdot b \quad \text{et} \quad G_2 = G_1 \cdot a .$$

Les nombres a et b , qui ont sur G_1 le même effet, c'est-à-dire qui produisent chacun la grandeur G_2 , sont dits *égaux* et représentés chacun par le symbole $\frac{G_2}{G_1}$ sans distinction. On écrira :

$$b = a \quad \text{ou} \quad \frac{G_2}{G_1} = \frac{H_2}{H_1} .$$

Il faut bien se garder de confondre des nombres égaux avec des nombres identiques, quels que soient les symboles qui les représentent.

Ainsi les symboles

$$\frac{G + G + G}{G} \quad 1 + 1 + 1 \quad \text{et} \quad 3$$

désignent un seul et même nombre, tandis que les symboles

$$\frac{11}{4} \quad \frac{22}{8} \quad 2,75 \quad \text{et} \quad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

désignent des nombres égaux mais non identiques.

On démontre que *les produits d'une grandeur quelconque par des nombres égaux, sont des grandeurs égales.*

Somme de nombres. — Considérons des nombres a et b et une grandeur arbitraire G que l'on puisse multiplier par ces nombres ; soient les grandeurs

$$G_1 = G \times a \quad \text{et} \quad G_2 = G \times b .$$

Le nombre $\frac{G_1 + G_2}{G}$ s'appellera *somme* des nombres a et b , et se représentera conventionnellement par le symbole $a + b$.

On aura donc

$$\frac{G_1 + G_2}{G} = a + b ,$$

d'où

$$\frac{Ga + Gb}{G} = a + b , \quad (1)$$

$$G(a + b) = Ga + Gb , \quad (2)$$

$$\frac{G_1 + G_2}{G} = \frac{G_1}{G} + \frac{G_2}{G} . \quad (3)$$

La somme des nombres a et b est indépendante de la grandeur G qui a servi à la définir : soit, en effet, une grandeur H autre que G (de la même classe que G ou d'une autre classe), et posons

$$s = \frac{Ga + Gb}{G} \quad s' = \frac{Ha + Hb}{H} .$$

Il apparaît avec évidence que les nombres s et s' sont identiques, car ils indiquent que le traitement qu'on a appliqué à G pour former $Ga + Gb$ est absolument le même que celui qui a été appliqué à H pour former $Ha + Hb$: multiplier G ou H successivement par a et par b , puis considérer la somme des grandeurs obtenues. C'est donc à juste titre que le symbole $a + b$ ne donne aucun renseignement au sujet de la grandeur ayant servi à le définir.

Produit de nombres. — Considérons les nombres a et b , et une grandeur G .

Soient

$$G_1 = G \cdot a \quad \text{et} \quad G_2 = G_1 \cdot b$$

en supposant bien entendu que ces produits existent.

Le nombre $\frac{G_2}{G}$ s'appellera *produit* de a par b ; on le représentera conventionnellement par les symboles $a \times b$ ou ab .

On aura donc

$$\frac{G_2}{G} = a \times b .$$

D'où

$$\frac{(Ga)b}{G} = ab , \quad (1)$$

$$G(ab) = (Ga)b , \quad (2)$$

$$\frac{G_2}{G} = \frac{G_1}{G} \times \frac{G_2}{G_1} . \quad (3)$$

Cette dernière formule est fort importante, car elle donne naissance à la première règle de calcul : la *suppression des G_1 en diagonale descendante de gauche à droite*.

Rapport de nombres. — Considérons les nombres a et b . On appelle *rapport* de a à b , le seul et unique nombre tel, que le produit de b par ce nombre est égal à a .

Un tel nombre existe. En effet, soit G une grandeur que l'on puisse multiplier par a et b ; je dis que le nombre $\frac{Ga}{Gb}$ répond à la question.

On a :

$$b \times \frac{Ga}{Gb} = \frac{Gb}{G} \times \frac{Ga}{Gb} = \frac{Ga}{G} = a$$

en appliquant la règle de calcul trouvée au numéro précédent.

On démontre que le nombre $\frac{Ga}{Gb}$, que l'on convient de représenter par le symbole $\frac{a}{b}$, est indépendant de G ; à cet effet, désignons par x un nombre ayant la propriété

$$b \times x = a.$$

Multiplions une grandeur H par le produit $b \times x$ ou a . On aura

$$H (bx) = Ha = (Hb) x.$$

d'où

$$x = \frac{Ha}{Hb}.$$

Je dis que

$$\frac{Ha}{Hb} = \frac{Ga}{Gb}.$$

Car on a

$$b \cdot x = b \times \frac{Ha}{Hb} = a$$

d'où

$$G \times \left(b \times \frac{Ha}{Hb} \right) = Ga = (Gb) \times \frac{Ha}{Hb}, \quad \text{ou} \quad \frac{Ga}{Gb} = \frac{Ha}{Hb}.$$

Classification des nombres absolus. — Considérons un nombre a , rapport des grandeurs G_2 et G_1 .

1° Si G_2 et G_1 sont des sommes de grandeurs égales à une grandeur G , leur rapport est appelé un *nombre commensurable*.

Dans ce cas on a

$$a = \frac{G_2}{G_1} = \frac{G + G + \dots + G}{G + G + \dots + G}.$$

En particulier, si G_2 est une somme de grandeurs égales à G_1 , leur rapport est appelé un *nombre entier*.

Dans ce cas on a

$$a = \frac{G_2}{G_1} = \frac{G_1 + G_1 + \dots + G_1}{G_1} = \frac{G_1}{G_1} + \frac{G_1}{G_1} + \dots + \frac{G_1}{G_1} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1.$$

2° S'il n'existe aucune grandeur telle, que G_2 et G_1 soient des sommes de grandeurs égales, le rapport $\frac{G_2}{G_1}$ est appelé un *nombre incommensurable*.

Telle est, exposée avec quelques détails supplémentaires pour certains points, dans ses grandes lignes pour d'autres, la base de ma théorie arithmétique. On a pu voir que le fond des idées ne m'appartient nullement en propre et que de grands mathématiciens ont eu ces idées-là bien avant moi. Lorsque je m'en suis aperçu, le livre était imprimé, ce qui explique l'absence du nom de Duhamel dans mon texte. Mais ce qui n'avait pas encore été fait c'est un exposé complet de la théorie générale des nombres absolus et relatifs conformément à ces principes.

En particulier, les nombres complexes (les imaginaires $a + ib$) avaient bien reçu une *interprétation* géométrique ; mais comme on peut s'en rendre facilement compte, le principe même de cette interprétation est mauvais ; le nombre complexe ne représente pas *un* vecteur d'un plan, et ce vecteur seul ne représente pas le nombre ; celui-ci est le rapport de deux vecteurs, et le second ne doit pas être considéré comme appartenant à un axe fixe, unique, que l'on appelle souvent l'axe des nombres réels ; le symbole i ne doit pas non plus être considéré comme représentant un vecteur-unité porté par l'axe perpendiculaire à l'axe des nombres réels ; ce symbole i est le rapport de deux vecteurs quelconques perpendiculaires et égaux, le sens de rotation étant direct du second vers le premier. Et dans l'extension à l'espace, i sera le vecteur-unité porté par l'axe perpendiculaire au plan de repère ; dans le cas d'une figure plane, cet axe est perpendiculaire au plan de la figure.

C'est pour ces motifs qu'Argand et ses successeurs ont échoué dans leurs tentatives d'étendre à l'espace l'interprétation géométrique des nombres complexes. Leur conception de ces nombres comme symboles représentatifs de vecteurs était fautive. Le nombre ne représente pas un vecteur, mais il est le rapport de deux vecteurs. Il a fallu le génie de Hamilton pour créer la théorie des biradiales.

Voilà pourquoi aussi je ne puis me rallier aux théories qui font des nombres des symboles *représentatifs* de grandeurs ; on ne tient pas compte dans ces théories de ce qu'il n'y a dans aucune

classe, de grandeur étalon fixe. La théorie que j'ai développée est donc beaucoup plus générale ; et on le verra aisément, si l'on veut lire ma théorie des *ternions* ; ceux-là sont effectivement les rapports de vecteurs quelconques à un vecteur unique, pris sur l'axe de repère de tout l'espace. Chaque ternion représente alors sans ambiguïté un vecteur ; la somme de deux ternions sera un ternion ; mais leur produit sera un quaternion, à moins qu'ils soient coplanaires avec le vecteur-étalon.

En résumé, la théorie du nombre, rapport de grandeurs géométriques permet une exposition absolument méthodique et générale de l'arithmétique. Un même mot n'a pas plusieurs significations différentes ; la continuité des fonctions somme, produit, quotient, racine, etc., est assurée, et l'arithmétique garde son véritable caractère utilitaire et rationnel.

Un mot encore, avant de terminer. Le nombre entier est d'un emploi courant dans le langage ordinaire. Cet emploi est-il compatible avec la définition que j'en ai donnée, ou bien le nombre du public n'est-il pas plus le nombre du mathématicien qu'il n'est celui du logicien ?

M. H. Laurent a répondu à l'avance à cette question ¹. Les objets que le nombre entier permet de compter sont désignés dans le langage courant au moyen d'un terme générique qui les dépouille de tous les attributs par quoi ils diffèrent. Ainsi quand on dit cinq animaux, il peut y avoir là des chevaux et des oiseaux réunis.

Ces cinq animaux sont *égaux* puisqu'on ne les distingue pas ; et le mot cinq indique bien la loi de formation de cette collection d'animaux au moyen d'un animal.

Je demandais récemment à un jeune enfant combien il avait reçu de bons points à son école. Il m'a répondu : « Comme ça ! » en me montrant quatre doigts ; et il a ajouté en me montrant ses deux mains ouvertes : « Quand j'en aurai comme ça, je recevrai une belle image ».

Ainsi donc cet enfant construisait une collection à l'aide de ses doigts d'après la même loi de formation que sa collection de bons points à l'aide de l'un de ces petits carrés de carton. Je crois qu'il ne serait pas possible de trouver une preuve plus éclatante de la rationalité de ma théorie.

Je prétends que le logicien en échafaudant sa théorie n'a pas atteint le but qu'il s'était proposé : définir les nombres. Il a esquivé ce but ; il a créé de toutes pièces une série d'êtres, sortes de mannequins automates, auxquels il a donné le nom de nombres, mais je le répète il n'a pas défini ce qu'il voulait définir. Les

¹ Sur les principes de la théorie des nombres (*Collection Scientia*, n° 20).

définitions ne peuvent pas être de perpétuelles créations, ou bien il leur manquera toujours la vie.

Dans tous les cas, je mets le plus subtil logicien au défi de créer la moindre théorie, y compris celles de ses nombres, sans faire appel aux postulats suivants :

1. *Postulat de l'espace.* — Il existe des corps naturels distincts (en particulier moi).

2. *Postulat de la conscience humaine.* — Il est possible à l'homme de prendre conscience des corps naturels, et de concevoir des abstractions correspondantes.

3. *Postulat du temps.* — Il est possible de considérer des objets (corps naturels ou concepts abstraits) dans un certain ordre de succession.

4. *Postulat du mouvement.* — Il est possible de modifier les situations relatives de plusieurs objets.

5. *Postulat du raisonnement.* — Il est possible de raisonner juste.

Ces postulats sont indispensables à la *moindre de nos pensées* ; et principalement à l'écriture.

Juin 1912.

Emile DUMONT (Bruxelles).

CHRONIQUE

Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.

A la suite du décès de son président, M. Henri Poincaré, la Commission du Répertoire s'est réunie le 18 décembre 1912 afin de procéder à l'élection d'un nouveau président et d'aviser aux mesures que peut nécessiter l'œuvre du Répertoire.

C'est M. H. d'OCAGNE, professeur à l'École polytechnique de Paris, qui a été désigné comme président. En prenant possession du fauteuil présidentiel, il est rappelé à la Commission que, à la suite du décès de M. Raffy, les fonctions de secrétaire avaient été confiées à M. GÉRARDIN (Nancy).

M. Gérardin a expliqué la situation de l'œuvre du Répertoire ; 20 séries de fiches sont actuellement étudiées, elles comprennent 2000 fiches et 18,523 titres. Plus de 20,000 titres de mémoires sont actuellement classés et prêts à être édités ; ils donneront lieu à