Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1913)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: L'Astronome.

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

équations différentielles. Ce n'est pas la partie la moins importante de l'œuvre car elle joue un rôle essentiel en Mécanique céleste, science sur laquelle l'illustre géomètre nous a laissé des ouvrages d'un caractère suffisamment didactique.

Au contraire il ne nous laisse rien de semblable, quant à ces fonctions analytiques auxquelles il a cependant si merveilleusement travaillé. Tout est dans des mémoires isolés. En de nombreux endroits de son *Traité d'Analyse*, M. Emile Picard nous a fait connaître des fragments de ces trésors. Les ouvrages didactiques de M. Appell sur les fonctions elliptiques, sur les fonctions algébriques et leurs intégrales, peuvent constituer aussi d'importants travaux d'approche pour qui veut s'initier aux résultats dus à Henri Poincaré ; mais qui n'aurait désiré cependant que ce dernier publie lui-même un ouvrage, à début relativement élémentaire, sur les fonctions abéliennes et fuchsiennes.

Peut-être ne jugeait-il point ces théories suffisamment parfaites et préférait-il continuer à les étendre.

Il est certain aussi que la possibilité de marcher sans cesse à de nouveaux résultats diminuait chez lui le désir de s'attarder à exposer ceux qui déjà lui semblaient acquis.

L'Astronome.

Si l'Astronomie est — ne serait-ce que d'après l'étymologie du mot — l'étude des lois présidant au mouvement des astres, nul ne fut, à notre époque, plus astronome qu'Henri Poincaré.

Les lois de Képler — dont la loi de Newton est une conséquence très simple — règlent très aisément le mouvement relatif de deux corps célestes, le soleil et une planète par exemple. Que l'on adjoigne un troisième corps et l'on se trouve en présence des difficultés les plus formidables et les plus inattendues. Et cependant ce fameux Problème des trois corps s'impose absolument. Impossible de s'en tenir toujours au mouvement d'une seule planète, sans considération

des perturbations provenant d'une autre. Impossible, en particulier, de faire la théorie de la Lune sans tenir compte de l'influence perturbatrice du Soleil.

Et cependant, ainsi posé, le problème n'avait jamais pu être poussé bien loin. Lagrange en transforma les équations de manières diverses et intéressantes, mais ne fit guère apparaître autre chose que les intégrales des aires et des forces vives, conformément aux lois les plus générales de la Dynamique. Laplace, dans des cas extrêmement particuliers, montra que le problème admettait des solutions périodiques, mais les trois corps formaient toujours les sommets d'un triangle équilatéral ou étaient toujours en ligne droite.

C'est à Henri Poincaré que revient encore la gloire d'avoir établi l'existence de solutions périodiques infiniment plus générales, d'avoir montré que le problème n'admet point d'intégrales à propriétés analytiques simples, en dehors précisément de celles des aires et des forces vives, et notamment point d'intégrales uniformes. De plus ses méthodes se trouvèrent propres à faire une synthèse de toutes celles employées, un peu au hasard, pour résoudre le problème dans les cas où les besoins pratiques demandaient impérieusement des résultats, quels qu'ils soient. Bien plus il montra que ces méthodes pratiques avaient des infirmités profondément insoupçonnées et dont la révélation fut une véritable stupéfaction.

A l'occasion de son soixantième anniversaire, en 1889, S. M. le Roi de Suède et de Norvège, Oscar II, ouvrit un concours entre les géomètres du monde entier. Préoccupation bien digne de ces âpres contrées scandinaves qui virent naître Abel ! Le premier mémoire couronné fut celui d'Henri Poincaré *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique* lequel contient déjà toutes les merveilles précédentes. D'ailleurs le même concours fut un triomphe général pour l'école française car le mémoire *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs,* immédiatement placé après le précédent, était dû à M. Paul Appell. Les deux écrits remplissent à eux seuls le tome XIII des *Acta Mathematica.*

Quelques années plus tard, en développant son travail,

Henri Poincaré devait en tirer les trois admirables volumes intitulés *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste.*

Dans le premier volume il établit rigoureusement l'existence des solutions périodiques, examine les solutions infiniment voisines et, à l'aide de ces éléments, cherche à rétablir les solutions quelconques, représentées par des séries entières en μ (cette lettre désignant un rapport de masses généralement très petit), que les praticiens obtenaient d'une manière quasi empirique. C'est ici que se place la révélation stupéfiante mentionnée plus haut et qui se trouvait déjà dans le mémoire des *Acta*. Quand, partant des solutions périodiques et de leurs transformées infiniment voisines, on cherche à bâtir une solution plus générale (qualifiée de *solution asymptotique),* la construction de celle-ci, dans la méthode d'Henri Poincaré, dépend de certaines équations différentielles linéaires à coefficients constants dans lesquelles la variable, bien entendu, est le temps. Mais les solutions contiennent alors μ non pas sous forme de séries entières, comme il arrivait dans la pratique, mais sous forme de fractions de la forme

$$\frac{A_n}{1 + a_n \mu},$$

Comment établir l'accord ? Rien de plus simple *au point de vue formel.* La simple division développe la fraction précédente en série entière. Oui, mais le rayon de convergence est alors mesuré par la valeur absolue de $-\frac{1}{a_n}$, *et il se trouve que les a_n grandissent au delà de toute limite. Les séries entières en μ sont toujours divergentes.* Cependant, dira-t-on, elles n'avaient point cette apparence dans les calculs des astronomes. Ceux-ci ne prenant que les premiers termes, constataient leur rapide décroissance et voyaient bien qu'il n'y avait point d'inconvénient pratique à négliger les autres ! Tout cela est exact mais c'est là un phénomène de convergence asymptotique déjà présenté par bien d'autres séries, telles celles de Stirling, qui sontd'une construction extrêmement simple par rapport à celles de la Mécanique céleste.

La découverte d'Henri Poincaré consistait précisément à éclairer la nature intime de développements sur lesquels on ne savait à peu près rien au point de vue analytique pur.

Le second volume des *Méthodes nouvelles* est surtout consacré à la comparaison des méthodes qu'il rattache aux siennes propres. Les idées de Gyldén notamment y tiennent une place considérable. Et, chose curieuse, alors que Gyldén semble avoir d'abord servi de guide à Henri Poincaré, la puissance de ce dernier fut telle qu'il passa rapidement avant son guide et rectifia bientôt des erreurs que celui-ci commettait. Le Mémoire *Sur la Méthode horistique de Gyldén* (*Acta Mathematica*, 1905) est, à cet égard, d'une lecture singulièrement suggestive.

Le troisième volume a surtout trait à l'emploi de la notion d'*invariant intégral*. Le mouvement d'un liquide, pour prendre un exemple relativement simple, est en général régi par des équations d'une étude déjà fort compliquée. Pourtant le *volume* du liquide est une chose simple à concevoir et qui se conserve quelque compliquée que soit l'agitation des particules. C'est là un *invariant intégral*. Dans un tel cas, cet invariant est plutôt une donnée de la question qu'une conséquence des équations du mouvement, mais Henri Poincaré remarqua précisément que de tels invariants existent même dans les cas où ils ne sont pas visibles à l'avance de manière aussi évidente. Les conséquences qu'il en tire sont nombreuses. Ils correspondent notamment, dans le problème des trois corps, à l'existence de certaines solutions périodiques.

De telles solutions sont toujours caractérisées par l'existence de courbes fermées, ce qui est évident, en particulier, pour les trajectoires des corps si la périodicité consiste, pour ceux-ci, à revenir à des positions déjà occupées. Mais comment reconnaître qu'aux inextricables équations du mouvement correspondent certaines courbes fermées? L'un des plus beaux raisonnements consiste à attacher à ces courbes de certaines intégrales multiples qui, comme l'intégrale double qui figure dans la formule de Stokes, ne sont bien au fond que des intégrales de ligne *si la courbe est fermée*.

Ainsi l'invariant intégral prouve l'existence de la solution périodique.

Pour l'heure actuelle tous ces merveilleux résultats ne semblent compris que de manière partielle ; en tous cas il ne semblent pas avoir fait naître des travaux d'une ampleur proportionnée à celle de l'exemple donné par le génial créateur. Peut-être, comme l'a dit Sir G.-H. Darwin en remettant à Henri Poincaré la Médaille d'Or de la Société astronomique de Londres, l'ouvrage précédent sera-t-il, pour le prochain demi-siècle, la mine d'où des chercheurs plus humbles extrairont leurs matériaux. (*Voir* E. Lebon, *loc. cit.*, *p.* 48)

C'est dans un ordre d'idées plus modeste, mais encore passablement élevé, que sont conçues les *Leçons de Mécanique Céleste* professées à la Sorbonne. J'ai déjà rendu compte de ces trois nouveaux volumes dans *L'Enseignement Mathématique*[1] ce qui me permet d'être un peu plus bref à leur égard. Ce qui frappe surtout en eux c'est l'extrême habileté avec laquelle toutes les équations sont immédiatement écrites sous la forme canonique et la manière de rattacher à la méthode de la variation des constantes la question fondamentale de la destruction des termes séculaires.

Le second volume est consacré, dans une première partie, au développement de la fonction perturbatrice. Les belles recherches sur les périodes des intégrales doubles y interviennent constamment. Dans la seconde partie, consacrée à la Théorie de la Lune, nous sommes directement conduits aux équations linéaires écrites par Hill pour le mouvement du nœud et du périgée lunaires.

La Théorie des Marées occupe tout le troisième volume. Ainsi que je l'ai déjà dit plus haut (p. 15) elle emprunte un

---

[1] Voici d'ailleurs la liste des publications d'Henri Poincaré qui ont été analysées dans cette Revue. Les noms propres en italique sont ceux des auteurs des analyses. — La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes (*C.-E. Guye.* — T. I, 1899, p. 228). — Electricité et Optique (*A. Buhl.* — T. IV, 1902, p. 307). — Wissenschaft und Hypothese (*H. Fehr.* — T. VII, 1905, p. 330). — Leçons de Mécanique Céleste (*A. Buhl*): Tome I. — Théorie générale des perturbations (T. VIII, 1906, p. 248). — Tome II. — Fonction perturbatrice et Théorie de la Lune (T.XI, 1909, p. 231). — Tome III. — Théorie des Marées (T. XII, 1910, p. 256). — Savants et écrivains (*X.*-T. XII, 1910, p. 259). — Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik (*A. Buhl.* — T. XII, 1910, p. 446). — Calcul des probabilités (*A. Buhl.* — T. XIV. 1912, p. 165). — Hypothèses cosmogoniques (*A. Buhl.* — T, XIV, 1912, p, 167). Mentionnons aussi l'étude du docteur Toulouse sur Henri Poincaré, récemment analysée par *Ed. Claparède.* (T. XIV, 1912 p. 81).

caractère ultra-moderne à la théorie des équations intégrales de Fredholm.

Dans ces admirables développements, Henri Poincaré fait à beaucoup de géomètres l'effet d'être isolé : lui seul pouvait se retourner dans l'infinie variété de ces questions ardues. Cette impression vient probablement de la concision de son style mais cependant, si l'on persiste à l'étudier, on est rapidement convaincu qu'il n'a jamais cherché à s'enfermer dans une tour d'ivoire. Au contraire, il citait avec empressement tous ceux à qui il empruntait quelque chose et semblait heureux de fondre leurs travaux avec les siens. Dans les si difficiles chapitres qu'il consacre à la non-existence des intégrales uniformes du problème des trois corps (*Méthodes nouvelles*, t. I, chapitres V et VI), il montre tout le parti qu'il tire des célèbres résultats de M. Darboux concernant l'obtention des coefficients des termes de rang élevé dans la série de Taylor.

Dans le tome II des *Leçons*, il joint soigneusement aux siens les travaux de M. Picard sur la périodicité des intégrales doubles et emprunte à M. Appell ses séries hypergéométriques à deux variables pour aborder le développement de la fonction perturbatrice. Sa gloire lui semblait sans doute plus chère quand elle était celle de la Sorbonne et plus généralement de cette école française, maintenant consternée par l'immense perte qu'elle vient de faire.

Ce qu'il y a d'effrayant, c'est qu'il n'a jamais cherché à donner le moindre caractère définitif à ses travaux de mécanique céleste. Sans cesse il y ajoutait quelque chose de nouveau, disait y apercevoir des lacunes que personne n'avait vues mais qui étaient pour lui prétexte à de nouvelles et importantes publications.

Quelques semaines avant sa mort paraissait dans les *Rendiconti* du Cercle mathématique de Palerme un article *Sur un théorème de Géométrie* dans lequel il revient encore à ses chères solutions périodiques du Problème des trois corps. Il s'agit cette fois de reconnaître l'existence de certaines d'entre elles pour des valeurs de μ non très petites, ce qu'il rattache à l'existence d'un invariant intégral

relatif à de certaines transformations qu'il considère comme purement géométriques.

Il montre les grandes difficultés qu'il rencontre et exprime ainsi le regret de ne pouvoir les vaincre complètement : « Il semble, dans ces conditions, que je devrais « m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas « résolu la question ; mais après les inutiles efforts que j'ai « faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage « était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant « quelques années ; cela serait très bien si j'étais sûr de « pouvoir le reprendre un jour, mais, à mon âge, je ne puis « en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est « trop grande et l'ensemble des résultats obtenus trop con- « sidérable déjà, pour que je me résigne à les laisser défini- « tivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres « qui s'intéresseront à ce problème et qui seront sans doute « plus heureux que moi, pourront en tirer quelque parti et « s'en servir pour trouver la voie dans laquelle ils doivent « se diriger ».

Quels mots ajouter, dit M. Paul Painlevé, à ce testament scientifique si noble et si simple ? Rien, en effet. Tout commentaire risquerait de détruire le sublime provenant de tant de modestie s'ajoutant à tant de valeur.

L'honneur de continuer à la Sorbonne l'enseignement d'Henri Poincaré échoit à M. Paul Appell, qui reprend la chaire de Mécanique céleste sous le titre de « Mécanique analytique et Mécanique céleste ».

Ceci n'étonnera personne, non seulement parce que les travaux des deux géomètres présentent de nombreux contacts, non seulement parce que les équations de la dynamique ont été mises, par M. Appell, sous des formes nouvelles et originales, qui pourraient bien donner, en mécanique céleste, des surprises analogues à celles qu'Henri Poincaré tirait de la forme canonique, mais aussi parce que l'éminent successeur a souvent manifesté le désir de voir quelque géomètre ou astronome se reporter aux travaux d'Henri Poincaré pour essayer de les rendre plus accessibles en quelque cas particulier simple et heureusement choisi. Par suite, le

géomètre ou l'astronome en question ne pouvaient vraisemblablement espérer de meilleur guide.

Le Physicien.

Le passage de la Mécanique Céleste à la Physique mathématique, ou réciproquement, paraît avoir été fait par Henri Poincaré avec une aisance extrême, avec une continuité absolue.

Au moment où les grands problèmes de la Physique s'offrirent à lui, les esprits étaient particulièrement en butte à l'obsession mécaniste. Il fallait trouver des explications mécaniques de la lumière, de l'électricité, bref, de tous les phénomènes. L'école anglaise, avec Maxwell, et après des efforts aussi considérables que bizarres, semblait bien entrevoir quel devait être le véritable résultat mais la clarté n'était pas la qualité dominante de Maxwell. Ce dernier entassait les unes sur les autres des théories d'apparences contradictoires ; quand on les avait toutes lues, non seulement on ne savait point quelle était la bonne, mais on avait encore l'impression extrêmement déconcertante que l'auteur avait tout fait pour empêcher un choix définitif.

La véritable pensée de Maxwell nous fut clairement livrée par Henri Poincaré, notamment dans ses admirables leçons de la Sorbonne publiées sous le titre *Electricité et Optique*. Si l'on veut une théorie mécanique de l'électricité ou de la lumière, c'est à dire si l'on veut construire les équations des phénomènes électriques ou lumineux *en partant des équations de la Dynamique*, la chose est possible *d'une infinité de manières*. Choisissons la manière qui nous semble être la plus commode et la plus féconde, mais quant à en imaginer une qui nous livrerait un mécanisme unique, définitif et nous ferait connaître une vérité physique absolue, ceci n'appartient plus à la physique mais à la métaphysique.

Une telle conclusion ébranle douloureusement l'esprit de celui qui la conçoit pour la première fois. L'homme, dit Henri Poincaré, ne se résigne pas aisément à ignorer le fond des choses.