

BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

BIBLIOGRAPHIE

R. D'ADHÉMAR. — **Leçons sur les principes de l'analyse.** TOME II : *Fonctions synectiques. Méthodes des majorantes. Equations aux dérivées partielles de premier ordre. Fonctions elliptiques. Fonctions entières.* Avec une note de SERGE BERNSTEIN. — 1 vol. in-8° de VIII-300 p., avec 34 figures, 10 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

L'esprit de cet ouvrage a déjà été signalé ici même (t. XIV, 1912, p. 434) lors de la publication du tome I. Il se retrouve identiquement dans le tome II, ce qui ne peut d'ailleurs étonner, quand il s'agit d'un auteur aussi consciencieux que M. d'Adhémar.

Dans l'étude des fonctions synectiques, le point de vue qui prévaut est toujours celui de Cauchy avec les méthodes de majoration qu'employait ce géomètre pour prouver la convergence des séries ou pour limiter simplement ses intégrales définies ; c'est en s'attachant à ce point de vue que l'auteur étudie les développements plus modernes avec les méthodes de majoration qu'ils comportent.

D'ailleurs, il nous montre bien que la méthode des majorantes n'est pas, comme beaucoup l'ont cru et le croient peut-être encore, une méthode accessoire qui sert surtout à prouver la convergence de séries qu'il est beaucoup plus important d'obtenir au point de vue formel. La méthode des majorantes a un intérêt propre, une élégance et une souplesse qui lui permettent de s'appliquer aux problèmes les plus divers ; c'est ce que nous voyons ici dans des problèmes fonctionnels (qui ont donné lieu dans ces dix dernières années à d'importantes thèses due à MM. Grévy, Léau, Lattès et à nombre d'autres travaux) où l'holomorphie de la solution se déduit très naturellement de la méthode.

On pourrait ensuite faire une remarque d'un esprit à peu près analogue dans la théorie du prolongement analytique où les auteurs, tels que Weierstrass, Méray, Mittag-Leffler, ont encore la place d'honneur, mais où arrive tout à coup Fredholm qui, en résolvant à sa manière certaines équations intégrales, a naturellement prolongé les séries entières qui peuvent aussi satisfaire à de telles équations. En d'autres termes l'idée de prolongement analytique s'est liée à des choses autrefois fort éloignées de la seule considération des séries tayloriennes.

Dans les intégrales analytiques, particulièrement dans les calculs à la Cauchy, M. d'Adhémar a tracé des contours élégants, calculé facilement de nombreux résidus, déterminé les nombres et les polynômes de Bernoulli et finalement présenté la très belle application qui consiste en la résolution, par rapport à F , de l'équation aux différences finies :

$$F(z+1) - F(z) = G(z) .$$

C'est surtout avec les équations différentielles qu'apparaît le rôle capital des méthodes de majoration. Pour Cauchy l'existence des intégrales reposait surtout sur le fait de pouvoir les développer en séries entières ; pour M. S. Bernstein, qui a renouvelé la question, tout repose sur l'emploi de séries dont les termes sont de la forme :

$$A_{pq} x^p (R - x)^q .$$

Non seulement M. d'Adhémar a montré brièvement ce qu'on pouvait attendre de ces nouvelles séries, mais il a prié M. Bernstein de revenir lui-même sur les traits essentiels de la question, dans une note ajoutée au volume.

Je signale encore deux chapitres fort clairs sur les équations aux dérivées partielles et aux différentielles totales ; pour l'équation aux dérivées partielles de premier ordre, une grande importance est donnée au théorème de Cauchy concernant l'unicité de la solution attachée à une courbe donnée non caractéristique. Plus exactement, il y a là un théorème tout à fait général heureusement et élégamment préparé dans le cas d'une seule équation.

L'esprit sinon encyclopédique, mais, du moins, prompt à rattacher rapidement les uns aux autres différents sujets intéressants, reparait dans le dernier chapitre consacré aux intégrales de fonctions non uniformes, aux fonctions elliptiques, aux fonctions entières.

Comme pour les fonctions uniformes de Cauchy, l'auteur a fait beaucoup d'ingénieux tracés autour des points critiques et calculé d'abord de nombreuses intégrales définies. Il a fait ensuite l'inversion de l'intégrale elliptique et donné une idée de la méthode générale d'inversion en introduisant la célèbre fonction thêta de Riemann. Il est revenu ensuite au principe de Dirichlet pour rétablir la belle formule de Poisson et démontrer des théorèmes sur le module maximum d'une fonction holomorphe, ce qui le conduit enfin à étudier sommairement l'allure des fonctions entières prises sous forme de produits infinis.

En résumé, pour élever son enseignement jusqu'à de hautes régions de la science, M. d'Adhémar a su prendre quelques chemins particuliers, si l'on veut, mais toujours rapides et précis. Les perspectives plus ou moins engageantes qu'il pouvait voir à droite et à gauche ne l'ont pas détourné du but et cependant il laisse la vue ouverte sur ces perspectives pour tous ceux qui voudront bien le prendre pour guide.

Une indiscretion nous permet d'annoncer la publication d'un tome III. Souhaitons égoïstement que M. d'Adhémar se résolve à faire ce nouvel effort ; il en épargnerait beaucoup d'autres à ceux qui se retournent de plus en plus difficilement au milieu du fatras des innombrables publications d'aujourd'hui.

A. BUHL (Toulouse).

W. M. BAKER et A. A. BOURNE. — **A Shorter Algebra**. — 1 vol. in-8, VIII-320-LIX p. ; 2 s. 6 d. ; G. Bell and Sons, Londres.

Le manuel « Shorter Algebra » de MM. Baker et Bourne est un résumé de leur Cours d'Algèbre en deux volumes intitulé « Elementary Algebra ». Il est consacré aux premiers éléments d'Algèbre. Les notions usuelles d'Arithmétique étant seules supposées connues, les auteurs en tirent parti pour la première initiation à l'Algèbre. La théorie est réduite au minimum,

mais elle est accompagnée d'un grand nombre d'exercices. La notion de coordonnées et de représentation graphique, introduite à la suite des équations du premier degré, est reprise à propos des équations du deuxième degré. Après les progressions arithmétiques, géométriques et harmoniques et les équations de troisième degré (résolution graphique) les auteurs consacrent un dernier chapitre aux rapports et proportions. Chaque notion nouvelle est illustrée par un grand nombre d'exercices et de problèmes ; les réponses sont données en appendice à la fin du volume.

Ce Cours d'Algèbre est considéré comme suffisant à la préparation d'un grand nombre d'examens dont les auteurs font la nomenclature dans la préface, entre autres des examens d'admission dans les universités des Iles Britanniques et des colonies. Au reste, MM. Baker et Bourne reproduisent, sous le titre « Examination Papers », un certain nombre de questions qui ont été proposées à ces divers examens.

R. MASSON (Genève).

G.-St.-L. CARSON. — **Essays on Mathematical Education**, with an introduction by D.-E. SMITH. — 1 vol. in-8, 139 p. ; Ginn and Co, Londres et Boston.

Ce titre réunit huit conférences et articles de M. Carson à des sociétés mathématiques et à divers périodiques scientifiques. Ces études abordent des questions d'ordre philosophique ou pédagogique relatives à l'éducation mathématique. L'auteur s'adresse plus spécialement au corps enseignant et aux mathématiciens anglais. Mais, ainsi que le constate M. D.-E. Smith (New-York) dans la Préface en signalant l'utilité pour son pays, les remarques de M. Carson peuvent être considérées comme ayant une portée générale.

La première de ces études est intitulée : *De quelques principes d'éducation mathématique*. L'auteur y traite la question de l'adaptation du choix des axiomes, postulats et démonstrations, à l'âge et à la préparation des élèves.

M. Carson envisage ensuite le rôle de l'*Intuition*, il rend attentif au fait très important, surtout pour la géométrie, que ce terme peut correspondre à des degrés de certitude très divers, dont il faut savoir tenir compte dans l'enseignement. L'éducation mathématique devrait, dans un premier cours basé sur l'intuition, embrasser l'arithmétique, la géométrie et la mécanique ; puis, dans un second cours, reprendre les questions en sens inverse pour chaque branche afin d'arriver finalement à une conception claire des principes à la base de chaque science.

Le troisième article *l'utile et le réel*, établit la différence trop souvent négligée entre le réel, l'utile et le concret et leur signification spéciale au point de vue pédagogique.

Les mathématiques pures ne sont pas une science purement spéculative, mais ont une action directe considérable sur la pensée humaine et le développement social. C'est cette notion que M. Carson développe sous le titre : *De quelques possibilités irréalisées dans l'éducation mathématique*. Il montre dans quelle mesure elle devrait influencer la première éducation mathématique.

Dans *Enseignement de l'arithmétique élémentaire*, M. Carson passe en revue le champ de l'arithmétique élémentaire en cherchant par quels moyens cet enseignement peut réaliser son triple but : utilisation pratique, déve-

l'approfondissement de la compréhension des questions sociales et politiques, et développement de la faculté de pensée personnelle.

La *valeur éducative de la géométrie* renferme des considérations intéressantes établissant l'utilité universelle de la géométrie dans l'éducation, indépendamment de son rôle pratique; ces remarques sont accompagnées de conseils et indications pédagogiques que l'auteur tire de sa propre expérience professorale.

Enfin les deux dernières études se rapportent à la mécanique; ce sont *le rôle de la déduction en mécanique élémentaire* et *une comparaison entre la géométrie et la mécanique*.
R. MASSON (Genève).

A. CHATELET. — **Leçons sur la théorie des nombres**, professées au Collège de France (*Modules. Entiers algébriques. Réduction continue*). — 1 vol. gr. in-8° de x-156 p.; 5 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Les ouvrages ayant trait à l'algèbre ou à l'arithmétique pure n'abondent pas en France, il y a là une première raison d'accueillir favorablement ces nouvelles *Leçons*. Bien que l'auteur renvoie volontiers à Tannery, à MM. Borel et Drach, à M. Cahen, je retrouve surtout dans son livre les élégants et intuitifs procédés de la *Geometrie der Zahlen*, de Minkowski.

Le point de départ est la théorie des substitutions linéaires. Comme une telle substitution est évidemment définie par ses coefficients, lesquels forment un tableau carré, l'étude est ramenée à celle de ces tableaux pour lesquels on peut établir très simplement des règles de calculs analogues (mais plus générales) à celles qui concernent les déterminants. On peut aussi introduire immédiatement le langage géométrique en considérant n nombres p_1, p_2, \dots, p_n comme coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions mais, là encore, une généralité supérieure à celle de la géométrie peut immédiatement apparaître. Ainsi, si la distance de deux points peut être définie à la manière ordinaire, elle peut aussi l'être de manière à ne pas employer toutes les propriétés de la distance géométrique mais seulement certaines essentielles au sujet. On peut, par exemple, concevoir une distance généralisée qui, pour des segments parallèles, est proportionnelle à leur longueur. Pour chaque direction issue de l'origine on a ainsi une unité de longueur particulière ou des segments unitaires dont l'ensemble forme un *volume* limité par une certaine *surface*. Il ne faut évidemment pas perdre de vue le sens spécial de ces mots mais il est ensuite fort curieux de voir le calcul intégral s'y adapter fort bien.

Le mot *module*, qui a en mathématiques un si grand nombre de significations différentes, a ici un sens analogue à celui du mot *groupe*. Les modules sont des ensembles de points invariants pour la soustraction; les *modules types* sont ceux dont tous les points se déduisent d'un tableau quelconque par multiplication par une ligne d'entiers.

On est alors amené naturellement à étudier les systèmes d'entiers, l'ensemble des multiples d'un nombre, la divisibilité, et comme il est facile d'établir qu'un tableau à termes entiers peut se mettre sous une forme spéciale (où tous les éléments situés d'un même côté de la diagonale sont nuls), on est déjà conduit, par un exemple simple, à ces réductions de tableaux qui jouent un si grand rôle dans les travaux d'Hermite.

L'étude de la divisibilité conduit aussi à la résolution des équations de Diophante. Telle est la première moitié du livre de M. Châtelet; c'est le nombre entier qui y joue le rôle fondamental et, bien entendu, il n'en

pouvait être autrement, mais il me semble utile d'insister sur la chose, car tout le plan de l'ouvrage est déjà dessiné dans cette première moitié. Quand nous abordons les nombres algébriques et leur classification, nous retrouvons l'uniformité de la marche précédente. Ce n'est pas une nouveauté et c'est tout à fait naturel, mais c'est ce que l'auteur a su faire ressortir très heureusement. Il nous construit les nombres d'un *corps* par une arithmétique analogue à celle des multiples d'entiers et montre très nettement, où l'analogie ne subsiste pas forcément, ce qui conduit au nouveau concept d'*idéal*. Le dernier grand problème qu'il aborde, celui de la réduction continue des tableaux, nous ramène aux considérations géométriques de Minkowski. M. Châtelet a élégamment redémontré les deux théorèmes fondamentaux dus à cet auteur en laissant la plus grande généralité possible à la notion de distance généralisée.

Trois notes terminent le volume. La première est consacrée à l'application de la théorie des modules aux fonctions périodiques ou aux fonctions quasi-périodiques de M. Esclangon. Une telle application résulte, très en gros, de ce que l'ensemble des périodes d'une fonction périodique forme un module ; par suite toutes les constructions de modules, en partant des plus simples et notamment des modules types, permettent des constructions de plus en plus générales pour des systèmes de périodes à existence exacte ou approchée.

Il y a là, très nettement, bon nombre d'idées originales.

La seconde note nous donne un exemple numérique de corps algébrique pour le corps $K(\sqrt{82})$. La troisième nous indique comment l'impossibilité de congruences entre idéaux laisse cependant définir les congruences entre nombre d'un corps relativement à un idéal lui appartenant. Voilà, à coup sûr, des aperçus qui sembleront bien vagues à qui n'a jamais pénétré dans la science des nombres ; mais tous ceux qui ont entrevu, tant soit peu, son aspect énorme et souvent rébarbatif (surtout chez les auteurs allemands) verront sans doute, dans le livre de M. Châtelet, un enchaînement bref et correct qui laisse transparaître beaucoup de clarté. A. BUHL (Toulouse).

H. DINGLER. — **Die Grundlagen der angewandten Geometrie** (Les bases de la géométrie appliquée). — 1 vol. in-8°, 160 p. ; Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

Cet ouvrage porte également en sous-titre : *Etude des relations entre la théorie et l'expérience dans les sciences exactes*, et il a pour but de résoudre la question séculaire liée au Postulat d'Euclide, savoir : De toutes les géométries logiques, quelles sont celles qui sont applicables à notre espace empirique ; ou bien : Notre espace empirique est-t-il euclidien ou non-euclidien ?

L'auteur arrive à cette conclusion : Dans notre espace empirique, la géométrie euclidienne seule est admissible ; ou : Notre espace empirique est euclidien.

Ses idées sont développées dans trois chapitres : I. *Le problème* ; II. *La théorie de la mathématique appliquée* ; III. *Application à la géométrie*.

Par mathématique appliquée, l'auteur n'entend pas, comme on le fait communément, les branches techniques dont les développements théoriques sont basés sur les mathématiques ; il réserve son expression à une mathématique expérimentale déduite de la construction et de la mesure, mais dans laquelle on tient un compte précis du coefficient d'exactitude.

Dans le premier chapitre : *Le problème*, il pose la grande question liée à

l'axiome des parallèles. Cet axiome est logique, il est indépendant des autres axiomes, donc il ne peut pas en être déduit. En le supprimant ou en le remplaçant par un autre, non moins logique, on arrive à d'autres géométries ; mais celles-ci peuvent-elles s'appliquer à notre espace empirique ou physique ? Voilà la question.

M. Dingler établit ensuite une géométrie empirique, dans laquelle il crée des plans, des droites et des points réels, comparables entre eux, en partant du procédé mécanique de construction des surfaces planes. Il étend ensuite ses notions de géométrie empirique au corps rigide, mais celui-ci sera de nouveau défini plus tard comme un *résultant* de la géométrie euclidienne.

Dans la seconde partie : *Théorie de la mathématique appliquée*, l'auteur s'étend sur des considérations philosophiques spéciales relatives aux principes d'identité et d'exactitude appliqués aux méthodes de mesures. Il insiste spécialement sur la règle de Mach : Choisir, parmi les procédés scientifiques conduisant au même but, celui qui est le plus simple. (« Machsches Oekonomieprinzip. »)

La troisième et dernière partie conduit aux conclusions déjà indiquées. D'après l'auteur, la géométrie cesse d'être une science de logique pure, pour devenir une *science expérimentale* ou empirique, comme la physique ou la chimie.

Du fait des prémisses posées dans la seconde partie, le corps rigide doit être euclidien et l'espace auquel il appartient le devient également.

Philosophiquement parlant, la lecture de l'ouvrage est attrayante, les déductions sont fort belles, et si le lecteur ne prend pas la peine de se reporter, à chaque moment, aux bases mêmes de la géométrie, il est tenté de croire que la solution du problème donnée par M. Dingler est définitive.

A notre point de vue, elle ne l'est pas. L'espace empirique ou physique est continu et illimité ; mathématiquement parlant, il est absolument assimilable à un espace linéaire à trois dimensions. D'autre part, les trois objets géométriques fondamentaux : le point, la droite et le plan, restent malgré tout des concepts abstraits. La question ne sera résolue que quand on aura démontré que le plan tel que nous le concevons : *l'élément géométrique univoquement déterminé par trois points*, ne peut pas être engendré par deux droites lobatschweskiennes ou riemanniennes. L. CRELIER (Bienne).

A. GRÜTTNER. — **Die Grundlagen der Geometrographie** (Les bases de la géométrographie). — 1 vol. in-8°, 53 p. : Quelle & Meyer, Leipzig.

Ce petit ouvrage comporte trois parties qui répondent aux trois questions suivantes : Quelles sont les bases de la géométrographie ? Jusqu'où sont-elles développées ? Peut-on les perfectionner ?

Dans la première partie l'auteur étudie : *Le développement de la géométrographie*. Après avoir fait ressortir l'utilité de cette nouvelle doctrine, il en établit l'histoire et expose les divers systèmes de notation actuellement en cours. Nous retrouvons les systèmes Lemoine (L), Bernès (B), Grüttner (G) et Papperitz (P).

La deuxième partie est une : *Critique des systèmes géométrographiques*. Sans entrer dans tous les détails de la comparaison des systèmes, nous dirons simplement que l'auteur fait ressortir la caractéristique du système Grüttner (G), qui est son système. C'est l'introduction d'un coefficient ε , considéré comme unité relative du travail géométrographique. Ce coefficient

doit servir à remplacer les nombres de Lemoine ($l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$) et ($l_1 + m_1 + m_2$) donnant, le premier *la simplicité*, et l'autre *l'exactitude* d'une construction géométrographique. D'après l'auteur, on doit pouvoir *mesurer* les difficultés géométrographiques d'un problème, et c'est pour cela qu'il introduit le coefficient ε .

La troisième partie : *Développement raisonné d'un système géométrographique*, est consacrée à tous les arguments militant en faveur du système (G). L'auteur place la pratique du dessinateur à la base de ses considérations ; il montre l'insuffisance de la notation du système (L) dans les questions du compas, du changement d'instruments, de la prolongation des droites, etc. ; puis, se basant sur diverses observations d'ordre psychologique et physique, il introduit la mesure du travail A, qu'il appelle unité absolue de travail géométrographique, par opposition à ε , qu'il désigne sous le nom d'unité de mesure des difficultés géométrographiques. Les valeurs A et ε sont liées par la relation : $\varepsilon = 2,5 A$.

Jusqu'à quel point l'empirisme l'emporte-t-il dans les considérations relatives aux valeurs ε et A ? C'est une question à laquelle nous ne voulons pas répondre, mais ces deux nombres nous semblent très recherchés et bien factices. Dans tous les cas, ils n'appartiennent plus au domaine de la mathématique pure.

L. CRELIER (Bienne).

C. DE JANS. — **Les multiplicatrices de Clairaut.** Contribution à la théorie d'une famille de courbes planes. — 1 vol. in-8°, IV, 136 p. ; 5 fr. ; A. Hoste, Gand.

Cette contribution à la théorie d'une famille de courbes planes est une monographie des plus intéressantes dans laquelle l'auteur traite les propriétés générales des courbes de la forme :

$$r = k \sin^m \theta ,$$

connues sous le nom de « Courbes de Clairaut du 1^{er} type », pour en déduire ensuite les cas algébriques ainsi que quelques cas plus particuliers.

La classification de ces courbes donne lieu au tableau suivant :

$$\text{Courbes mono- et bisymétriques} \left\{ \begin{array}{l} \text{directes} \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ espèce } (-\infty < m < -1) \\ 2. \text{ espèce } (-1 < m < 0) \end{array} \right. \\ \text{inverses} \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ espèce } (1 < m < \infty) \\ 2. \text{ espèce } (0 < m < 1) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

M. de Jans donne ensuite une construction simple des tangentes, des normales et des rayons de courbure, puis quelques autres propriétés relatives à toute la famille.

Le IV^{me} chapitre est consacré aux cas algébriques. Nous y trouvons l'étude des singularités, du degré, de la classe et du genre des courbes considérées.

Dans le chapitre VI, l'auteur traite plus spécialement le biovale :

$$r = k \sin^2 \theta .$$

En dehors des propriétés analytiques, il développe encore les conchoïdes de

cette courbe et indique une génération cinématique de la courbe et ses conchoïdes.

La courbe de Playfair : $r^2 = k^2 \sin \theta$ est étudiée dans le chapitre VII.

L'ovoïde : $r = k \sin^3 \theta$ fait l'objet d'une étude particulière dans le chapitre VIII.

Notons en passant les applications physiques des courbes de Clairaut à la représentation du champ de force d'un point courbe (chap. V), ainsi que les propriétés physiques du biovale (chap. VI, § 5); il peut être considéré comme le lieu des points figuratifs des courants qui exercent la même force magnétique sur l'origine.

En résumé, l'auteur qui, pour justifier sa publication, s'est inspiré des belles paroles de Helmholtz : « Chaque travailleur a le devoir moral de communiquer aux autres le résultat de ses recherches », a rendu un excellent service à tous les géomètres s'occupant de courbes spéciales. Les résultats qu'il présente sont réellement très intéressants. L. CRELIER (Bienne).

G. LORIA. — **Le Scienze esatte nell'antica Grecia.** Seconda edizione totalmente riveduta. — 1 vol. in-16 de xxiv-969 p., relié 9 L. 50; Ulrico Hoepli, Milan.

Cet ouvrage donne un tableau de l'œuvre mathématique si importante des anciens Grecs. Il permet à ceux qui étudient l'antiquité classique de compléter leur connaissance de la vie et de la culture grecque et il leur montre comme toutes les bases des théories arithmétiques et géométriques actuelles sont contenues en germe dans les travaux du génial peuple hellène.

Le *Livre Premier* (I geometri Greci precursori di Euclide) expose le premier stade de développement de la Géométrie chez les Grecs; le *Livre Second* (Il periodo aureo della geometria greca) fait connaître les méthodes et les résultats de la brillante période où vécurent Euclide, Archimède, Apollonius et leurs disciples directs.

Le *Livre Troisième* (Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci) est consacré aux recherches mathématiques des savants antiques qui se proposaient de donner une explication satisfaisante des plus remarquables phénomènes naturels. Le lecteur rencontrera dans ce livre l'astronome Ptolémée et le prince de la géodésie : Héron d'Alexandrie.

Dans le *Livre Quatrième* et dernier (Il periodo argenteo della geometria greca) l'auteur retourne à un monde exclusivement géométrique en exposant les quelques progrès dus aux commentateurs des grands auteurs, puis il termine par un tableau des différents aspects sous lesquels les Grecs envisagèrent la Science des nombres et des résultats auxquels ils surent parvenir dans ce champ particulièrement fertile.

La première édition parut de 1893 à 1902 dans différents volumes des mémoires de l'Académie de Modène et attira aussitôt l'attention des spécialistes; c'est pour répondre à de nombreuses demandes que l'auteur et l'éditeur se sont décidés à publier cette œuvre en un volume, après l'avoir soumise à une révision rendue indispensable par la découverte récente de documents importants.

Ceux qui cherchent à connaître ce que nous savons de l'histoire des mathématiques grecques consulteront avec intérêt et profit l'ouvrage du prof. G. Loria. La littérature mathématique ne possède pas d'œuvre analogue conçue sur un plan plus vaste. Eug. CHATELAIN (La Chaux-de-Fonds).

O. STAUDE. — **Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte.** — 1 vol. in-8°, 242 p. avec 58 fig.; broché, 9 M.; relié, 10 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

En entreprenant cette *étude analytique des cubiques gauches*, M. Staude, professeur à l'Université de Rostock, a fait une œuvre utile dont lui sauront gré tous ceux qui s'intéressent à la Géométrie. Son ouvrage comble une lacune, car il n'existait pas de monographie récente sur ce sujet.

L'auteur s'appuie sur les méthodes de la géométrie analytique en supposant seulement connues les notions fondamentales¹ sur les différents systèmes de coordonnées et quelques théorèmes sur les quadriques.

Dans une première partie il étudie les cubiques gauches à l'aide des coordonnées rectilignes. Il considère d'abord les cubiques obtenues par l'intersection d'un cône et d'un cylindre, tous deux du 2^e ordre, et ayant une génératrice commune. Le sommet du cône est pris à l'origine et la génératrice commune coïncide avec l'axe OX. Les équations se simplifient lorsqu'on suppose qu'en outre le plan XOY est tangent au cône. La discussion conduit aux quatre types de cubiques qu'il désigne comme suit : I, l'ellipse cubique ; II, l'hyperbole cubique ; III, la parabole cubique hyperbolique ; IV, la parabole cubique.

Examinant ensuite les cubiques gauches en partant de leurs équations paramétriques, l'auteur montre qu'elles sont identiques avec celles des types obtenus dans le premier chapitre. Puis viennent les plans osculateurs, les cordes, les tangentes, etc. d'une cubique, et les quadriques de révolution passant par la courbe. La première partie se termine par l'étude approfondie des différents types de cubiques.

Dans la seconde partie M. Staude envisage les éléments de la courbe en coordonnées tétraédriques, le tétraèdre de référence étant celui qui est formé par le tétraèdre osculateur. Cette méthode permet d'exposer avec beaucoup de simplicité la génération projective des cubiques.

Comme les précédents ouvrages de M. Staude, celui-ci est rédigé avec une grande clarté d'exposition. Il constitue une importante contribution à la géométrie des cubiques gauches. Les figures, au nombre de 58, sont dessinées avec beaucoup de soin.

H. FEHR.

M. TIKHOMANDRITZKI. — **Éléments de la théorie des intégrales abéliennes.**

Nouvelle édition revue, corrigée, complétée de notes et en partie refaite entièrement. — 1 vol. gr. in-8°, de xv-286 p., avec une planche ; 14 fr. En vente à la librairie Eggers et Cie, Moïka, 42, Saint-Pétersbourg (Russie).

Le volume de M. Tikhomandritzky est un livre qui, grâce au nom de son auteur, se recommande de lui-même. Sa lecture ne peut être que profitable à tous ceux qui, désireux d'approfondir les propriétés des fonctions algébriques et de leurs intégrales, tiennent à le faire d'après un exposé succinct et condensé. Un grand nombre de déductions sont originales en ce sens qu'elles ne se trouvent que dans des mémoires de l'auteur, publiés en langue russe et, à cause de cela, d'un accès difficile. L'ouvrage ne fait pas davantage double emploi avec les grands traités qui ont paru sur la matière.

¹ On doit précisément à M. Staude deux excellents ouvrages consacrés aux éléments de géométrie analytique intitulés : *Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene* (Leipzig 1905), et *Analytische Geometrie des Punktpaares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. Ordnung* (Leipzig 1910, B. G. Teubner).

Pour s'en rendre compte, il suffit de lire l'article inséré récemment dans ce journal¹ et dans lequel M. Tikhomandritzky indique lui-même en quoi son volume diffère de tous ceux qui ont été publiés jusqu'ici sur le même sujet.

Voici, d'après la table des matières, le contenu du livre :

Chap. I. Propriétés d'une fonction implicite définie par une équation algébrique irréductible.

II. Sur les fonctions rationnelles de la variable indépendante x et de sa fonction implicite y définie par une équation algébrique irréductible.

III. Réduction des intégrales abéliennes aux intégrales des trois espèces ; les propriétés caractéristiques des intégrales de chaque espèce.

IV. Fonctions primaires. Relations entre les périodes des intégrales.

V. Expression d'une fonction rationnelle de x et y , uniforme sur la surface de Riemann, par les fonctions primaires. Théorème d'Abel.

VI. Le problème de Jacobi. — VII. Les fonctions thêta.

L'ouvrage se termine par une planche relative aux surfaces de Riemann.

L'intérêt que présente le livre de M. Tikhomandritzki est donc considérable. On peut être assuré qu'il sera beaucoup lu et beaucoup étudié. Seule l'imperfection de la langue risquerait de rebuter un peu, si les résultats mis par le savant russe à la portée de tous ne rendaient bien vite le lecteur indulgent. Les fautes grammaticales et de style sont nombreuses, mais il sera facile de les faire disparaître dans une autre édition.

Gustave DUMAS (Lausanne).

V. VOLTERRA. — **Leçons sur les fonctions de lignes**, professées à la Sorbonne en 1912, recueillies et rédigées par J. Pérès. — 1 vol. in-8° de vi-230 p. et 7 figures ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce volume fait suite aux *Leçons sur les équations intégrales et intégrales différentielles* déjà publiés par M. Volterra dans la collection de monographies de M. Borel, et analysées par l'*Enseignement mathématique* (t. XV, 1913, p. 447).

Ce nouvel exposé atteint à une simplicité et à une profondeur telles qu'il en est presque déconcertant. On peut croire que les chapitres scientifiques dont il s'agit ne sont nés que tout récemment, parmi les conceptions de géomètres comme MM. Hadamard, Fredholm ou Volterra lui-même ; peut-être accorderait-on aussi qu'on en trouve différents germes chez un Poincaré. Croire cela serait faire montre d'un esprit peu philosophique et c'est en Archimède que M. Volterra voit le proto-créateur des méthodes infinitésimales, en allant jusqu'à comprendre dans celles-ci tout ce qui se rapporte à l'idée moderne de fonctionnalité et de variation continue. En une vingtaine de pages préliminaires, nous voyons, en effet, comment les développements modernes des méthodes infinitésimales se placent avec une admirable continuité à la suite des méthodes primitives mais déjà infinitésimales du célèbre géomètre de Syracuse.

Les fonctions de lignes n'apparaissent pas seulement d'une manière immédiate sous forme de quantités variables, de par la variation d'une courbe $y = f(x)$; elles se rattachent aussi à de certaines quantités attachées elles-mêmes à des équations différentielles où $f(x)$ peut être un coefficient transformable. On peut leur rattacher encore les substitutions où les coef-

¹ Sur l'enseignement de la théorie des intégrales abéliennes, *Enseignement mathématique*, t. XV, année 1913, p. 384.

ficients varient de manière continue. D'autre part la résolution des équations intégrales correspond à la théorie élémentaire des fonctions implicites. D'une manière tout à fait générale, M. Volterra fait ressortir qu'il n'y a pas de chapitre d'algèbre qui ne donne un chapitre de la nouvelle science quand le nombre des variables passe du fini à l'infini. Et il le fait avec une élégance telle qu'on est tout étonné de retrouver, en effet, le caractère algébrique des raisonnements, mais non le caractère sec et aride qui paraît souvent propre à l'algèbre et détourne de cette science beaucoup d'excellents mathématiciens.

De même, dans ces dernières années, les jeunes géomètres qui devaient absolument se mettre au courant des équations intégrales ont pu hésiter sur le point de vue à adopter. M. Volterra semblait plus général mais, si M. Fredholm était plus particulier, il était peut être plus simple et, par suite, il pouvait sembler plus commode de commencer par ce dernier. Or, en toute impartialité, il me semble bien que tous les avantages sont du côté de M. Volterra; on passera très facilement de ses équations intégrales à celles de M. Fredholm. L'inverse est possible, mais certainement moins simple.

Je ne puis indiquer ici tous les beaux problèmes que traite le célèbre géomètre italien; il les emprunte particulièrement aux phénomènes *héréditaires* qui dépendent non d'un seul instant passé mais d'une infinité d'instant formant un passé continu. Ce ne sont point des phénomènes construits pour illustrer une théorie; leur réalité physique est indéniable et continuellement rappelée. Ils peuvent donner lieu, dans le temps, à des controverses philosophiques analogues à celles soulevées, dans l'espace, par les actions à distances. Le corps qui dépend d'un temps passé est comparable à celui qui dépend d'une région éloignée de l'espace. Ces quelques lignes suffiront à montrer le prodigieux intérêt que l'ouvrage aura certainement pour les géomètres, les physiciens et les philosophes. A. BUHL (Toulouse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Annali di Matematica. Série III, tome XXI. Alla memoria di LAGRANGE nel centenario della sua Morte. — E. J. WILCZYNSKI : Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi. — H. HAHN : Ueber die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat. — P. KœBE : Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie. — M. W. STEKLOFF : Sur une formule générale d'analyse et ses diverses applications. — A. R. FORSYTH : The range of minimal surfaces providing a minimum area. — S. PINCHERLE : Sull'operazione aggiunta di Lagrange. — M. C. CARATHÉODORY : Sur les points singuliers du problème du Calcul des Variations dans le plan. — E. E. LEVI : Sui criterii sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle Variazioni. — F. SCHUR : Ueber die berührenden Strahlennetze einer Strahlenkongruenz. — E. BOREL : Sur la théorie des résonateurs et la discontinuité des solutions de certains systèmes différentiels. — C. STÉPHANOS : Sur une propriété caractéristique des déterminants. — H. LAMB : On Some Cases of Wave-Motion on Deep Water. —