Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE BICENTENAIRE DE LA LOI DES GRANDS NOMBRES
Autor: Vassilief, A.
Kapitel: I
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15531

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

au contraire plusieurs pages; elle est délicate, elle utilise le changement de variable à la façon de Lebesgue et nécessite pour sa compréhension des connaissances étendues et une attention soutenue.

J'espère en avoir assez dit pour convaincre de la simplicité et de l'intérêt de la théorie de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée.

W. H. YOUNG (Genève).

LE BICENTENAIRE DE LA LOI DES GRANDS NOMBRES

Le 1/14 décembre 1914, l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg a consacré une séance solennelle à la célébration du bicentenaire de la publication à Bâle, en 1713, de l'œuvre posthume de Jacques BERNOULLI : *Ars conjectandi*. On sait que la quatrième partie de cet ouvrage contient l'énoncé et la démonstration du célèbre théorème de Jacques BERNOULLI, le plus simple cas d'un ensemble de théorèmes qui constitue *la loi des grands nombres*.

La séance fut suivie par un nombreux public ; elle comprenait trois discours. Tout d'abord M. le Prof. A. VASSILIEF parla *des questions de la théorie des probabilités jusqu'au théorème de Bernoulli*. Puis M. MARKOF, membre de l'Académie, et qui avait pris l'initiative de la séance, examina la *loi des grands nombres considérés comme un ensemble de théorèmes mathématiques*. Enfin M. le Prof. A. TSCHOUPROF montra le rôle de *la loi des grands nombres dans la science contemporaine*.

Nous croyons intéresser les lecteurs de cette Revue en leur donnant un aperçu de ces trois conférences.

I

M. le Prof. *A. Vassilief* a donné un aperçu historique du développement de deux notions fondamentales : de la probabilité mathématique ou *a priori* et de la probabilité *a posteriori* ou empirique. Dans la « Summa de Aritmetica Geometria Proportioni e Proportionalità » de Paciuolo, dans les ouvrages de Tartaglia,

de Cardan et de Galilée, on trouve les premiers essais de la résolution des problèmes relatifs aux jeux de hasard. On rencontre chez Cardan même des phrases que l'on peut regarder comme une divination de la loi des grands nombres. Mais c'est dans la célèbre correspondance de Pascal et de Fermat de 1654 et dans l'ouvrage de Huyghens « De ratiociniis in ludo aleae » (1657) que sont données les méthodes systématiques pour la détermination des probabilités *a priori;* c'est là qu'on trouve les premiers exemples des équations aux différences et l'emploi systématique de la théorie des combinaisons. Mais pour ces trois grands mathématiciens les problèmes avaient avant tout un intérêt mathématique ; dans un passage de la lettre adressée en 1654 « Celeberrimæ Academiæ Parisiensi » Pascal se réjouit que la résolution de ces problèmes soumette à la puissance de l'esprit *ce qui n'est pas accessible à l'expérience.* On voit par là que Pascal, en restant dans le domaine des jeux de hasard, était loin de voir la liaison de cette question avec les événements fortuits de la vie humaine ou de la météorologie.

D'un autre côté ce sont les besoins de la vie pratique qui ont amené déjà les jurisconsultes romains à considérer certaines probabilités empiriques. Notamment Ulpianus (le commencement du IIIe siècle a. D.) dans son commentaire sur la lex Falcidia a publié la première table des vies probables pour les différents âges. Les questions de l'assurance maritime contre les avaries — dans les républiques italiennes de Venise et de Gênes, — les assurances de vie et les rentes viagères en Hollande (Jean de Witt, 1671) ont amené à considérer les probabilités empiriques ou *a posteriori.* Déjà en 1666 on trouve dans le « Journal des Savants » une table de mortalité. En Angleterre ce sont les travaux de Graunt, de Petty, de Halley qui, entre 1661 et 1693, élaborent les méthodes relatives à la théorie de la population.

Le grand Leibniz s'est occupé à la fois et des questions relatives aux probabilités empiriques, et de celles qui ont pour but de déterminer pour différents jeux de hasard les probabilités *a priori.* En 1682 il a publié son : « Essay de quelques raisonnements nouveaux sur la vie humaine et sur le nombre des hommes[1]. » D'un autre côté il a attribué toujours une grande importance à l'étude des jeux. Dans ses manuscrits on trouve le calcul des probabilités pour le jeu de quinquenove et des études sur les jeux de la Bassette, de l'Hombre et du Solitaire[2].

En outre Leibniz a été amené aux questions de la théorie des probabilités par ses études sur la logique et par ses travaux de jurisprudence. Il avait le droit de dire dans sa lettre à Jean Ber-

---

[1] Klopp, *Werke von Leibniz,* V, S. 326-337, Hanover, 1866.
[2] Opuscules de Leibniz, édition de Couturat, Paris, 1903, p. 568.

noulli (6 juin 1710) à propos du manuscrit de l'Ars conjectandi : « Ego jam a puero hoc argumentum versavi tunc imprimis cum juri darem operam. » Sa « Scientia generalis » devait comprendre deux parties : la logique du nécessaire et la logique du probable. La première existe déjà : c'est la mathématique. Quant à la logique du probable, elle est à créer et c'est le domaine des sciences juridiques qui en a le plus besoin. « Ut mathematicos in necessariis sic jurisconsultos in contingentibus Logicam hoc est rationis artem prae ceteris mortalibus optime exercuisse (Ad stateram juris de gradibus probationum et probabilitatum. Opuscules, édition Couturat, p. 210. »)

Dans plusieurs de ses ouvrages consacrés à la jurisprudence Leibniz s'approche des questions fondamentales de la théorie des probabilités ; par exemple, dans le mémoire où il traite la question de l'élection du roi de Pologne, il parle de l'addition et de la multiplication des arguments juridiques. Grâce à ces travaux, l'esprit philosophique de Leibniz a compris que les questions des jeux de hasard ne sont qu'un cas spécial d'une doctrine qui doit traiter l'appréciation de tout ce qui n'est pas nécessaire et certain. Cette doctrine il l'appelle : « De incerti aestimatione sive de aestimandis probabilitatibus. » Les idées de Carnéade et de la troisième Académie sur les degrés de probabilité renaissent chez Leibniz comme un siècle et demi plus tard ce probabilisme de Carnéade et de Leibniz renaît dans les ouvrages philosophiques de Cournot. On trouve dans les manuscrits de Leibniz un intéressant mémoire sous le titre : « De incerti aestimatione » 1678 et là nous avons le principe de la probabilité totale énoncé déjà sous sa forme contemporaine[1]. Mais nous ne connaissons pas encore tout ce qui est contenu dans les manuscrits de la bibliothèque de Hanovre et nous devons espérer que M. Dietrich Mahnke, qui étudie si consciencieusement les manuscrits de Leibniz relatifs aux principes philosophiques de la théorie des probabilités[2], nous en donnera bientôt un aperçu complet. Jusque-là on peut seulement affirmer que, avant Jacques Bernoulli, personne n'a compris aussi largement et dans un esprit aussi philosophique les problèmes de la théorie des probabilités que Leibniz. Aussi prenait-il grand intérêt à la publication de l'Ars conjectandi ; et, dès que le livre a paru, dans la même journée du 9 septembre 1713, Jean et Nicolas Bernoulli en avertissent Leibniz[3]. Mais il est clair aussi qu'il a été loin de l'idée pleine de génie du théorème de Jacques Bernoulli. Quand ce dernier dans les lettres de 1703[4] a commu-

---

[1] Opuscules, éd. Couturat, p. 569-571.

[2] *Bibliotheca mathematica,* 1913. Voir aussi son intéressant article : « Leibniz als Gegner der Gelehrteneinseitigkeit. » Stade, 1912, S. 11-13, 77.

[3] GERHARDT, *Leibnizens mathem. Schr.*, III, S. 845, 850, 922, 889.

[4] GERHARDT, S. 77, ff.

niqué à Leibniz l'idée essentielle de son théorème il a rencontré de la part de Leibniz des objections auxquelles Bernoulli répond à la fin du chapitre 4 du livre IV de l'Ars conjectandi. Il faut ajouter cependant que dans la lettre à Bourguet, Leibniz (1714)[1] énonce déjà comme lui appartenant l'idée de la détermination de la probabilité empirique.

Quant à Jacques Bernoulli on peut supposer que c'est son voyage en Hollande de l'an 1681, quand il avait vingt ans, qui avait eu une grande influence sur la direction de ses pensées et de ses travaux. C'est à Amsterdam qu'il a écrit ses premiers ouvrages sur le mouvement des comètes (1682) et sur la pesanteur de l'éther (1683)[2]; le premier de ces ouvrages est dédié à Hudde, éminent mathématicien, qui, un des premiers, s'est occupé de la question des tables de mortalité. C'est là donc que pouvaient prendre naissance ses idées sur la détermination empirique des probabilités ; c'est là qu'il a pu commencer, comme il le dit dans sa lettre à Leibniz du 30 octobre 1703 « cogitare annon forte quod a priori non latet, saltem nobis innotescere possit a posteriori, ex eventu in similibus exemplis multoties observato. » Dans les premières années après son retour à Bâle jusqu'à ce qu'il y reçut, en 1687, la chaire de mathématiques, ses travaux mathématiques, physiques, mécaniques sont mêlés à des travaux dans le domaine de la logique. Ainsi en 1684 il défend « *cent thèses philosophiques* » dont 34 se rapportent à la théorie des syllogismes ; les autres sont des thèses oratoriæ et des thèses miscellaneæ ; plusieurs d'entre elles nous frappent par leur originalité, par exemple « Physica est pars specialis Matheseos », ou « Non in omni triangulo tres anguli sunt duobus rectis æquales », ou « Linea recta rectior posse dari. »

Parmi ces thèses de 1684 nous n'en trouvons aucune qui aurait pu se rattacher aux questions de la théorie des probabilités ; mais, en 1685, Bernoulli publie dans le « Journal des Savants » un problème sur la détermination de la probabilité mathématique fort intéressant au point de vue mathématique[3]. La même année, 1685, il imprime un mémoire intéressant : « Parallelismus ratiocinii logici et algebraici. » Dans la 19me thèse, il y énonce comme le plus grand mérite des mathématiques qu'elles peuvent avec une certitude apodictique discuter les choses éventuelles (illa de rebus maxime fortuitis vel casualibus v. gr. fortitionibus apodictice et certissimo ratiocinio discurrit). Pour confirmer sa thèse, Bernoulli donne deux exemples, et tandis que l'un se rattache au jeu des trois dés et à la probabilité de la somme indiquée des chiffres, c'est-à-dire à la détermination de la probabilité *a priori*,

---

[1] GERHARDT, *Philosoph. Schr. von Leibniz*, III, S. 570.
[2] Jacobi Bernoulli Basileensis opera. Genevæ, 1744.
[3] V. ENESTRÖM, *Jacob Bernoulli und die θ Reihen* (Biblioth. math., 1910).

l'autre (Problema de pactis dotalibus) dépend déjà de la probabilité pour une personne de vivre un certain nombre d'années, c'est-à-dire d'une probabilité empirique. En ayant supposé ici que la probabilité de vivre un certain nombre d'années est la même pour une jeune femme qui se marie et pour son père et son beau-père, Bernoulli une année après (1686 : Theses logicæ de conversione et oppositione enunciationum) résout le même problème dans une autre supposition, notamment qu'il est deux fois plus probable que Caja survivra aux vieillards. Et Bernoulli appuie cette supposition sur la table de mortalité insérée dans le « Journal des Savants » en 1666. Enfin en 1687, dans un mémoire « Solutio tergemini problematis » on trouve entre les thèses prises dans les différentes sciences mathématiques une *Ex arte conjecturandi.* Mais en commençant par 1688 nous ne trouvons déjà rien qui aurait pu nous renseigner sur ses travaux dans le domaine qui a illustré son nom, quoique de temps en temps il ajoute des thèses logiques à ses ouvrages purement mathématiques (p. ex. au mémoire : « De seriebus infinitis ») (1692).

Telles sont, comme on le voit, les indications peu suffisantes sur son travail persistant qui, comme dit Bernoulli lui-même dans l'« Ars conjectandi », a duré vingt années *(jam per vicennium pressi)* et qui a abouti à la démonstration du célèbre théorème. « Ars conjectandi » a été publiée en 1713 ; la loi des grands nombres pouvait maintenant devenir le fondement sûr de la science des événements collectifs (Massenerscheinungen) et un nouveau point de vue pour l'étude de la nature — point de vue statistique — s'ouvrait maintenant pour la science.

Moins de trente années après la publication de l'« Ars conjectandi », deux ouvrages ont été publiés qui avaient appliqué ce point de vue à des événements de grande importance. En 1738, Daniel Bernoulli publiait sa « Hydrodynamica » ; en 1741, un pasteur prussien Süssmilch — son ouvrage : « Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen ». Ce dernier ouvrage a été le précurseur des travaux de Quetelet, de Lexis et de tant d'autres qui ont fondé la statistique sociale. L'ouvrage de Daniel Bernoulli contenait le premier résultat de la théorie cinétique des gaz — la déduction de la loi de Boyle-Mariotte en partant de l'hypothèse du mouvement chaotique des molécules. Krönig, Joule, Clausius ont exploré le chemin ouvert par D. Bernoulli ; les travaux de Boltzmann, de Maxwell, de Lorentz, de Planck ont montré l'importance de cette voie pour toute la physique. Le monde scientifique vit sous l'impression de la théorie des Quanta de M. Planck. On sait quelle était l'opinion de l'inoubliable Poincaré sur les conséquences extrêmes auxquelles cette hypothèse doit fatalement nous conduire. Une con-

ception métaphysique des plus audacieuses — celle des *atomes du temps* — émise par les philosophes arabes de l'école des « Mutakallimun » renaît, basée sur les expériences relatives au rayonnement noir et aux chaleurs spécifiques pour les températures très basses.

Et c'est toujours le « flambeau des mathématiques » qui éclaire la science sociale comme la science physique. Deux siècles qui se sont écoulés depuis la publication de l'« Ars conjectandi » ont de plus en plus confirmé la thèse que son illustre auteur a énoncée en 1685 : *Omnes disciplinae Mathesi indigent; Mathesis nulla, sed per se sola sibi sufficit.*

II

M. A. *Markof* a commencé son discours en indiquant que le théorème de Jacques Bernoulli est le premier de l'ensemble des théorèmes qui peut être appelé *la loi des grands nombres.* On ne peut pas déterminer exactement l'année dans laquelle J. Bernoulli a trouvé sa démonstration. Dans ses lettres à Leibniz (3 octobre 1703 et 20 avril 1704) [1] Bernoulli écrit : « Dixi autem in istis me posse demonstrare ; viditque demonstrationen jam ante duodecennium Frater et approbavit. » Dans son ouvrage « Ars conjectandi » il éloigne à vingt ans l'époque à laquelle il a démontré ou commencé à démontrer son théorème : « Hoc igitur est illud problema quod evulgandum hoc loco proposui postquam jam per vicennium pressi. » Il est à remarquer que l'éditeur de l'ouvrage posthume, Nicolas Bernoulli, n'a pas apprécié à sa valeur l'importance du célèbre théorème. Au contraire, Jacques Bernoulli lui-même l'a considéré comme le fondement nécessaire pour la recherche des probabilités *a posteriori.* La démonstration de Jacques Bernoulli est tout à fait exacte, quoique liée à une condition restrictive relative aux nombres des épreuves. Comme la formule exacte qui exprime la probabilité que la différence entre le rapport du nombre des arrivées d'un événement quelconque A au nombre total des épreuves et la probabilité de l'événement ne sort pas des limites déterminées et très pénibles à calculer si le nombre des épreuves est grand, on se sert des formules d'approximation. On rencontre le premier exemple d'une telle formule d'approximation dans la lettre de Nicolas Bernoulli à Montmort, 23 juin 1713. Elle se rattache à la question intéressante de la stabilité de la distribution des nouveau-nés par rapport à leur sexe et a attiré l'attention de Moivre qui, aidé par Stirling, a

[1] GERHARDT, *Leibnizens math. Schr.*, III, S. 77, 88.