UN PROBLÈME SE RÉSOLVANT PAR LA GÉOMÉTRIE A 4 DIMENSIONS

UN PROBLÈME SE RÉSOLVANT PAR LA GÉOMÉTRIE A 4 DIMENSIONS

Le présent travail, dont j'ai entrepris la rédaction, est dû à M. Trosset, ingénieur, qu'une paralysie empêche d'écrire depuis plus de 2 ans.

Il s'agit d'un problème qui semble insoluble sans l'emploi du calcul intégral. M. Trosset, grâce à une heureuse incursion dans le domaine de la géométrie à n dimensions, est arrivé à le résoudre par les mêmes méthodes qu'un simple problème d'arithmétique. Il y aurait intérêt à le faire connaître aux lecteurs de l'*Enseignement mathématique*, un tel artifice permettant de traiter par l'algèbre élémentaire tous les problèmes qu'on résolvait jusqu'ici par l'intégration d'une fonction entière.

Berne, le 23 décembre 1913. J. SAUTER.

ENONCÉ DU PROBLÈME.

Un tronc de pyramide à bases rectangulaires a les dimensions suivantes : longueur de la grande base, 12 cm.; largeur, 8 cm.; distance entre les deux bases, 12 cm.; longueur de la petite base, 9 cm.; largeur, 6 cm. La grande base est en or pur, la petite base en argent pur ; entre deux le corps est constitué par un alliage de ces métaux, alliage de composition variable : dans le voisinage d'un point intérieur quelconque, les volumes des parties constituantes, or et argent, sont entre eux comme les distances du point à la petite et à la grande base. On donne la densité de l'or, 19, celle de l'argent, 10, et on demande d'une part le poids de l'or contenu dans ce corps, le poids de l'argent et le poids total, d'autre part la position des centres de gravité de l'or, de l'argent et de l'ensemble.

Pour fixer les idées, on supposera les bases horizontales et on admettra que le sommet de la pyramide idéale complète se projette horizontalement sur les milieux des bases.

RÉSOLUTION. — PREMIÈRE MÉTHODE.

La fig. 1 représente le corps en perspective. Soit $A_0B_0C_0D_0A_0$ le pourtour de la grande base, $A_aB_aC_aD_aA_a$ le pourtour de la petite. Commençons par décomposer le corps en neuf morceaux, en le coupant suivant quatre plans verticaux passant par les quatre côtés de la petite base ; soient A'', B''', B'', C''', C'', D''', D'', A''' les points où ces plans coupent le pourtour de la grande base et soient A', B', C', D' les projections verticales de A_a, B_a, C_a, D_a sur le plan de la grande base.

Considérons d'abord le corps central $A_a B_a C_a D_a A' B' C' D'$; c'est un parallélipipède rectangle. Imaginons que dans chaque couche horizontale ab de ce corps on pousse tout l'or du côté de la ligne a, comprise dans le plan $A_a D_a A' D'$, et tout l'argent du côté de la ligne b, comprise dans le plan $B_a C_a B' C'$; où sera la ligne de dé-

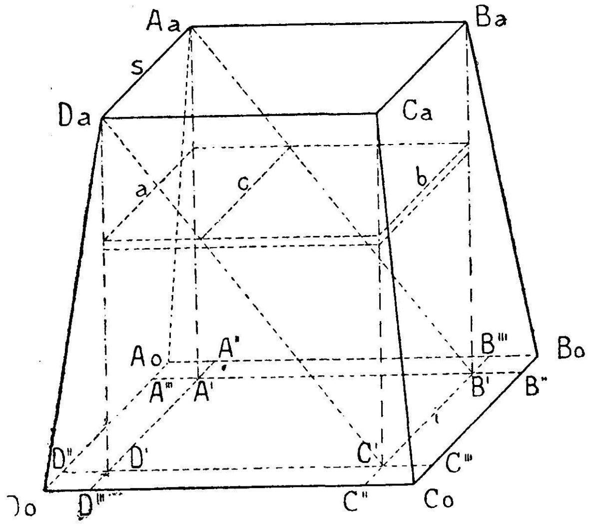

Fig. 1.

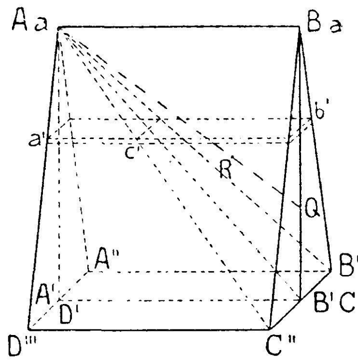

Fig. 2.

marcation c entre les deux métaux ? On doit avoir $ac : bc = v_0 : v_a = as : bi$, v_0 et v_a étant les volumes d'or et d'argent de la couche, s et i les lignes $A_a D_a$ de la base supérieure et $B' C'$ de la base inférieure ; par conséquent la ligne c ne peut être que l'intersection de la couche avec le plan diagonal si du parallélipipède. Nous pouvons donc remplacer le corps central par un prisme à bases triangulaires $A_a A' B' D_a D' C'$ en or pur et un prisme à bases triangulaires $A_a B_a B' D_a C_a C'$ en argent pur ; le volume de chacun de ces prismes est de $\frac{1}{2} \cdot 12 \times 9 \times 6 = 324$ cm^3 ; le premier pèse $324 \times 19 = 6156$ gr., le second $324 \times 10 = 3240$ gr. ; le centre de gravité du premier est à $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ cm. au-dessus de la base inférieure, le centre de gravité du second à $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ cm. au-dessus de cette base.

Passons maintenant aux morceaux $A_a A'' A' B' B''' B_a$ et $D_a D''' D' C' C'' C_a$ du corps total ; ce sont deux prismes à bases triangulaires, que nous réunirons en un seul prisme, également à bases triangulaires, en faisant coïncider A_aB_a avec D_aC_a, tout en laissant $A'A''B'''B'$ et $D'D'''C''C'$ dans le plan primitif de la base d'or du corps total ; la fig. 2 le montre en perspective. Ce que par la pensée nous avions fait pour une couche quelconque *ab* du corps central — pousser tout l'or d'un côté et tout l'argent de l'autre — nous pouvons le répéter pour une couche quelconque *a'b'* du prisme résultant que nous venons de former; ces deux couches sont rectangulaires ; pour toutes deux le rapport des distances de la ligne de démarcation or-argent aux plans $A''A_aD'''$, $B'''B_aC''$ sera égal au rapport des distances de la couche aux plans des bases inférieure et supérieure du corps total ; la ligne de démarcation *c'* se trouvera donc dans le plan diagonal $A_aC''B'''$. Au-dessous de ce plan nous aurons une pyramide d'or à base rectangulaire, dont le volume sera de $\frac{1}{3} \cdot 12 \times 9 \times 2 = 72$ cm³, le poids de $72 \times 19 = 1368$ gr., et le centre de gravité à $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$ cm. au-dessus de la grande base du corps total. Au-dessus du plan $A_aC''B'''$ restera un tétraèdre d'argent, que nous envisagerons comme une pyramide de base $C''B_aB'''$ et de sommet A_a ; son volume sera de $\frac{1}{3} \cdot 9 \times 2 \times \frac{1}{2} \cdot 12 = 36$ cm³, son poids de $36 \times 10 = 360$ gr. ; le centre de gravité Q de la base $C''B_aB'''$ sera à $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ cm. au-dessus de $C''B'''$; le centre de gravité R du tétraèdre, étant au quart de la distance de Q à A_a, sera à $4 \times \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} \cdot 12\right) = 6$ cm. au-dessus de la grande base du corps total.

En répétant les mêmes raisonnements pour les deux morceaux suivants $A_aA'''A'D'D''D_a$ et $C_aC'''C'B'B''B_a$, après avoir fait coïncider $A_aA'D'D_a$ avec $B_aB'C'C_a$, nous arriverons à leur substituer une pyramide d'or de base $B''C'''D''A'''$ et de sommet A_a, et une pyramide d'argent de base $D''C_aC'''$ et de sommet A_a. La pyramide d'or aura un volume de $\frac{1}{3} \cdot 12 \times 3 \times 6 = 72$ cm³, un poids de $72 \times 19 = 1368$ gr., et le centre de gravité à une hauteur de 3 cm. ; la pyramide d'argent aura un volume de $\frac{1}{3} \cdot 6 \times 3 \times \frac{1}{2} \cdot 12 = 36$ cm³, un poids de $10 \times 36 = 360$ gr., et le centre de gravité à une hauteur de 6 cm.

Il reste encore les 4 pyramides $A_aA'A'''A_0A''$, $B_aB'B'''B_0B''$, $C_aC'C'''C_0C''$, $D_aD'D'''D_0D''$, que nous grouperons par la pensée en une pyramide unique *p* en les faisant glisser sur le plan commun de leurs bases jusqu'à coïncidence de $A'''A'$ avec $D''D'$, de $B'''B'$ avec $A''A'$, de $C'''C'$ avec $B''B'$ et de $D'''D'$ avec $C''C'$. Cette pyramide *p*, dont fig. 3 est une élévation, a sa base en or et son sommet A_a en argent ; sa densité est donc de 10 au sommet et de

19 à la distance de 12 cm. au-dessous du sommet ; quelle sera la densité à la distance de x cm. au-dessous de A_a ? Si un petit fragment f, de forme quelconque, qu'on extrairait de la pyramide p à la distance x au-dessous de A_a, contient v_0 cm^3 d'or et v_a cm^3 d'argent, on doit avoir, d'après les données du problème, $\frac{v_0}{v_a} = \frac{x}{12 - x}$, d'où $\frac{v_0}{v_a + v_0} = \frac{x}{12}$ et $\frac{v_a}{v_a + v_0} = \frac{12 - x}{12}$; le fragment pesant $19\, v_0 + 10\, v_a$ gr., sa densité moyenne, et par conséquent la densité de la pyramide p à la distance x au-dessous de A_a, sera $d = \frac{19 v_0 + 10 v_a}{v_0 + v_a} = 19 \frac{x}{12} + 10 \frac{12 - x}{12}$ soit $d = 10 + \frac{9}{12} x$. Ce résultat montre que le poids de la pyramide p est égal à la somme des poids de deux

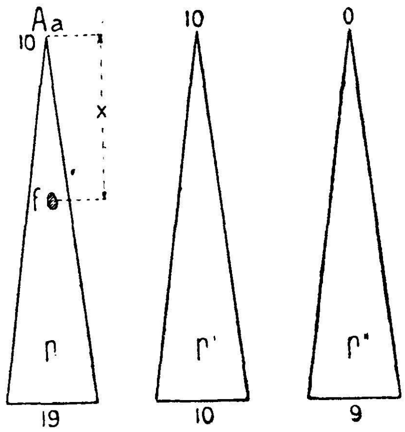

Fig. 3.

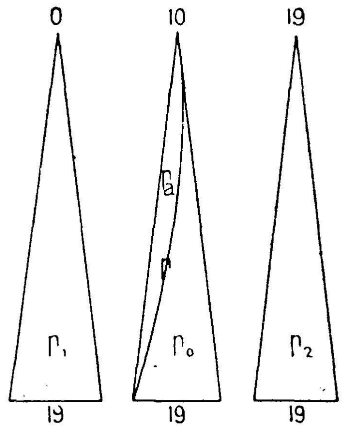

Fig. 4.

pyramides, p', p'', de mêmes dimensions que p, dont l'une, p', a partout la densité 10, tandis que la densité de l'autre, p'', varie suivant la loi $\frac{9}{12} x$ (la densité de p'' sera 0 au sommet et 9 à la base). Le volume de chacune des pyramides p, p', p'' est de $\frac{1}{3} \cdot 12 \times 2 \times 3 = 24$ cm^3. Le poids de la pyramide p' est donc de $10 \times 24 = 240$ gr. ; quant au poids de la pyramide p'', nous l'obtiendrons au moyen de l'artifice suivant.

Nous comparons notre pyramide à trois dimensions p'', dont la hauteur mesure 12 cm. et dont une section horizontale quelconque à la distance x au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{3}{12} x$ et comme largeur $\frac{2}{12} x$, à une pyramide à 4 dimensions P'', homogène, dont la hauteur mesure aussi 12 cm. et dont une section quelconque menée parallèlement à la base à la distance x au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{3}{12}x$, comme largeur $\frac{2}{12}x$ et comme troisième dimension $\frac{9}{12}x$, c'est-à-dire la valeur de la densité de p''. La capacité de la pyramide P″ se calculera comme le produit de la base $3 \times 2 \times 9$ par le quart (à cause des 4 dimensions) de la hauteur ; on trouve $3 \times 2 \times 9 \times \frac{12}{4} = 162$ unités.

Or la capacité de la pyramide P″ doit avoir la même valeur que le poids de la pyramide p'', donc cette dernière pèse 162 gr. Ajoutant ce résultat à 240 gr., poids de p', nous obtenons 402 gr., comme poids de la pyramide p.

Pour trouver le volume d'or V_0 et le volume d'argent V_a de p, il faut résoudre le système des deux équations

$$19V_0 + 10\,V_a = 402$$

$$V_0 + V_a = 24,$$

ce qui donne $402 = 19V_0 + 10\,(24 - V_0) = 9V_0 + 240$, $V_0 = \frac{402 - 240}{9} = 18$, d'où $V_a = 24 - 18 = 6$. Le poids de l'or de p est donc de $19 \times 18 = 342$ gr. ; le poids de l'argent de $10 \times 6 = 60$ gr.

Une nouvelle difficulté surgit, pour la détermination des centres de gravité de l'or et de l'argent que renferme la pyramide p ; nous utiliserons le nouvel artifice que voici (voir fig. 4) :

Nous supposons d'abord que, sans déplacer l'or de p, nous ayons extrait tout l'argent de cette pyramide ; le fragment f considéré plus haut contiendra encore v_0 cm³ d'or et présentera des vides mesurant v_a cm³, sa densité moyenne sera $\frac{19v_0}{v_0 + v_a} = \frac{19x}{12}$; nous comparons cette pyramide p_1, non homogène et pourtant sans argent, à une pyramide à 4 dimensions P_1, homogène, dont la hauteur mesure 12 cm. et dont une section quelconque menée parallèlement à la base à la distance x au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{3}{12}x$, comme largeur $\frac{2}{12}x$ et comme troisième dimension $\frac{19x}{12}$, c'est-à-dire la densité moyenne de f. Le centre de gravité de P_1 sera au cinquième de la hauteur (à cause des 4 dimensions), à partir de la base.

Or les calculs que demande la détermination du centre de gravité de P_1 sont identiques à ceux que demande la détermination du centre de gravité de p_1. Ce dernier se trouve donc aussi à $\frac{1}{5} \cdot 12 = 2{,}4$ cm. au-dessus de la base.

Ayant le centre de gravité de l'or de p, nous pouvons passer au centre de gravité de l'argent de p au moyen d'un troisième artifice :

Nous supposons cet argent transformé en or, ce qui n'en déplace pas le centre de gravité. Pour fixer les idées, nous admettrons qu'avant la transformation on ait poussé dans chaque tranche horizontale tout l'argent d'un côté et tout l'or de l'autre, parallèlement au plan de la fig. 4; la pyramide p aura été décomposée en deux corps, p_o, p_a, le premier tout en or, le second tout en argent, qui se touchent suivant une surface courbe dont la forme exacte ne nous intéresse pas ; ce transport n'aura pas changé la distance des centres de gravité de l'or et de l'argent à la base de la pyramide p.

Après la transformation du corps p_a en or, la pyramide p deviendra une pyramide homogène p_2, dont le centre de gravité est à $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$ cm. au-dessus de la base et qui mesure 24 cm^3, tandis que sa partie p_0 a son centre de gravité à 2,4 cm. et mesure $v_0 = 18$ cm^3. Or $3 \times 24 = 72$ et $2{,}4 \times 18 = 43{,}2$; la différence $72 - 43{,}2 = 28{,}8$ doit être égale au produit de $v_a = 6$, volume de la partie p_a, par la distance cherchée du centre de gravité de p_a à la base de p. Cette distance est donc $\frac{28{,}8}{6} = 4{,}8$ cm.

Récapitulons : Nous avons trouvé pour l'or des différentes portions du corps donné les poids et les altitudes de centre de gravité qui suivent (par altitudes nous entendrons la hauteur au-dessus de la base inférieure du corps total) :

corps central :	6156 gr.,	4 cm., produit	24624
1er prisme combiné :	1368 gr.,	3 cm., produit	4104
2d prisme combiné :	1368 gr.,	3 cm., produit	4104
pyramide p :	342 gr.,	2,4 cm., produit	820,8
Or total :	9234 gr.,		33652,8

divisant la somme des produits de droite par le poids total de l'or, on trouve comme altitude du centre de gravité de l'or $\frac{33652{,}8}{9234} =$ 3,6444 cm.; cette altitude et le fait que le centre de gravité doit, pour raison de symétrie, se trouver sur la verticale passant par les centres des bases, déterminent la position même du centre de gravité de l'or. Le problème est résolu pour l'or.

Quant à l'argent des différentes portions, nous avons obtenu comme poids et altitudes des centres de gravité :

corps central :	3240 gr.,	8 cm., produit	25920
1er prisme combiné :	360 gr.,	6 cm., produit	2160
2d prisme combiné :	360 gr.,	6 cm., produit	2160
pyramide p :	60 gr.,	4,8 cm., produit	288
Argent total :	4020 gr.,		30528

le centre de gravité de l'argent sera sur la même verticale que celui de l'or, mais à une altitude de $\frac{30528}{4020} = 7{,}5940$ cm. Le problème est aussi résolu pour l'argent.

Le poids total du corps sera de $9234 + 4020 = 13254$ gr. Son centre de gravité est situé sur la verticale qui joint les centres des bases, à une altitude qu'on obtient en divisant par 13254 la somme $33652{,}8 + 30528 = 64180{,}8$; l'altitude est de 4,8424. Le problème est complètement résolu.

Deuxième méthode.

Nous supposons établi que la densité du corps à la distance x au-dessous de sa petite base varie uniformément avec x, selon la formule $d = 10 + \frac{9}{12}x$. Nous avions démontré cette propriété pour la pyramide qui avait été désignée par p ; toutefois la formule est valable dans toute l'étendue du corps total, puisque la composition de l'alliage dépend seulement de x, d'après les données mêmes du problème.

Au lieu de couper le corps en morceaux, essayons de le compléter en prolongeant les arêtes obliques A_0A_a, B_0B_a, C_0C_a, D_0D_a jusqu'à leur point d'intersection z (voir fig. 5) et en supposant que la densité varie encore suivant la loi $d = 10 + \frac{9}{12}x$ au-dessus de la petite base, où x prendra des valeurs négatives. Nous désignerons par c le corps donné, par c' la pyramide additionnelle qui le surmonte, et par $C = c + c'$ le corps ainsi complété.

Pour trouver la hauteur h' de z au-dessus de la petite base, nous utilisons la proportion $\frac{h'}{h+h'} = \frac{C_aD_a}{C_0D_0} = \frac{9}{12}$, que démontre la figure ; h est la hauteur du corps donné, 12 cm. ; nous tirons de cette proportion $\frac{h'}{h} = \frac{9}{12-9} = 3$ soit $h' = 3h = 36$ cm.

Pour trouver la densité en z, il nous faut faire, dans la formule pour d, $x = -36$, et nous trouvons le résultat étrange $d = 10 - \frac{9}{12}36 = -17$, densité négative.

Mais ceci nous apprend qu'il suffit d'augmenter partout de 17 la densité du corps C pour en faire un corps C_1 assimilable à une pyramide homogène Q_1 à 4 dimensions, comme nous l'avions fait pour la pyramide p''.

Désignant par y la distance d'un point quelconque au sommet z, en aura $y = x + h' = x + 36$ et pour la densité d_1 en un tel point de C_1 $d_1 = 17 + d = 27 + \frac{9}{12}(y - 36) = \frac{9}{12}y$.

La pyramide à 4 dimensions Q_1 sera un corps homogène dont la hauteur mesure $h + h' = 48$ cm. et dont une section quelconque menée parallèlement à la base à la distance y au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{A_0 B_0}{h + h'} y = \frac{12}{48} y$, comme largeur $\frac{B_0 C_0}{h + h'} y = \frac{8}{48} y$ et comme troisième dimension $d_1 = \frac{9}{12} y = \frac{36}{48} y$.

Le poids de C_1 sera par conséquent égal au produit de la base

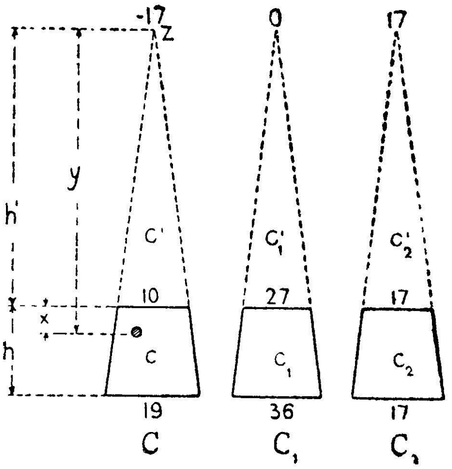

Fig. 5.

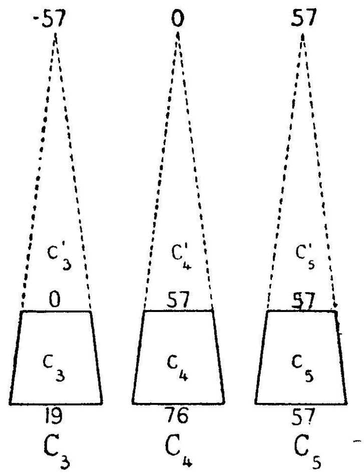

Fig. 6.

$12 \times 8 \times 36$ de Q_1 par 12, quart de la hauteur $h + h'$, donc 41472 gr., et l'altitude G_1 de son centre de gravité 9,6, cinquième partie de $h + h'$.

On passera au poids m'_1 de la partie supérieure c'_1 (correspondant à c') de C_1, soit à la capacité de la partie supérieure q'_1 de Q_1 en multipliant M_1 par la quatrième puissance du rapport des dimensions des corps semblables à 4 dimensions, c'est-à-dire par $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$, ce qui donnera $m'_1 = 13122$ gr. L'altitude g'_1 du centre de gravité de c'_1 sera égale à $h + \frac{h'}{5} = 12 + \frac{36}{5} = 19{,}2$.

Soustrayant 13122 de 41472, on obtient 28350 pour le poids m_1 de la partie inférieure c_1 (correspondant à c) de C_1, tandis que l'altitude g_1 du centre de gravité de c_1 sera donnée par relation $M_1 G_1 = m'_1 g'_1 + m_1 g_1$ soit, en remarquant que M_1, m'_1 et m_1 sont entre eux comme les nombres 256, 81 et $256 - 81 = 175$,

$$256 \times 9{,}6 = 81 \times 19{,}2 + 175\ g_1$$
$$\text{d'où } 175\ g_1 = 2457{,}6 - 1555{,}2 = 902{,}4,$$
$$\text{soit } 700\ g_1 = 3609{,}6 \text{ ou } g_1 = \frac{36{,}096}{7} \text{ cm.}$$

Nous introduirons encore un corps homogène C_2 de mêmes dimensions que le corps C, mais ayant partout la densité 17 ; nous y distinguerons encore deux parties, c_2 et c'_2, correspondant à c et c'. Le poids M_2 de C_2 est égal à $17 \times \frac{48}{3} \times 12 \times 8 = 26112$ gr., le poids m'_2 de c'_2 à $\left(\frac{3}{4}\right)^3 26112 = 11016$ gr., le poids m_2 de c_2 à $26112 - 11016 = 15096$ gr. L'altitude G_2 du centre de gravité de C_2 est de $\frac{1}{4} 48 = 12$ cm.; l'altitude g'_2 du centre de gravité de c'_2 est $12 + \frac{1}{4} 36 = 21$ cm.; l'altitude g_2 du centre de gravité de c_2 s'obtient par la relation $M_2 G_2 = m'_2 g'_2 + m_2 g_2$ soit, en remarquant que M_2, m'_2 et m_2 sont entre eux comme les nombres 64, 27 et $64 - 27 = 37$,

$$64 \times 12 = 27 \times 21 + 37\, g_2$$

$$\text{d'où } 37 g_2 = 768 - 567, \text{ soit } g_2 = \frac{201}{37}.$$

Tout est prêt pour la résolution de notre problème en ce qui concerne la masse totale du corps donné c. C'est que le corps c_1 peut être considéré comme la somme des corps c_2 et c; on doit avoir $m_1 = m_2 + m$ et $m_1 g_1 = m_2 g_2 + mg$, m étant le poids de c et g l'altitude de son centre de gravité; on trouve

$$m = m_1 - m_2 = 28350 - 15096 = 13254 \text{ gr.}$$

$$mg = m_1 g_1 - m_2 g_2 = 28350 \frac{36{,}096}{7} - 15096 \frac{201}{37}$$

$$13254\, g = 4050 \times 36{,}096 - 408 \times 201,$$

$$\text{d'où } g = \frac{146188{,}8 - 82008}{13254} = 4{,}8424.$$

En outre, tout le travail de raisonnement qui a été fait jusqu'ici va nous servir sans autre pour traiter le problème de l'or. Nous supposerons que par un procédé chimique nous ayons pu dissoudre et enlever tout l'argent du corps c; il restera un corps spongieux c_3 (voir fig. 6) de constitution analogue à celle de la pyramide p_1 (utilisée dans la 1re méthode), dont la densité moyenne à l'altitude x répond à la formule $d_3 = \frac{19}{12} x$. Ceci nous conduira à introduire successivement :

Un corps c'_3 de mêmes dimensions que c' et formant avec c_3 une pyramide C_3 dont la densité, répondant encore à la formule précédente, atteint au sommet la valeur négative -57;

un corps c_4 de mêmes dimensions que c_1 et dont la densité atteint 57 en haut et 76 en bas, donc des valeurs $\frac{19}{9}$ fois plus fortes que celles de c_1; le poids m_4 de ce corps sera donc $\frac{19}{9}\, 28350 =$

59850 gr., tandis que l'altitude g_4 de son centre de gravité reste $\frac{36,096}{7}$ cm.;

un corps homogène c_5 de mêmes dimensions que c_2, mais de densité 57, donc $\frac{57}{17}$ fois plus lourd ; son poids m_5 sera par conséquent $\frac{57}{17}$ 15096 $=$ 50616 gr., tandis que l'altitude g_5 de son centre de gravité reste $\frac{201}{37}$ cm.

Nous arriverons ainsi à $m_3 = m_4 - m_5 = 59850 - 50616 =$ 9234 gr. comme poids de l'or du corps c, et aux relations suivantes pour l'altitude g_3 de son centre de gravité :

$$m_3 g_3 = m_4 g_4 - m_5 g_5 = 59850 \frac{36,096}{7} - 50616 \frac{201}{37}$$

$$9234 g_3 = 8550 \times 36,096 - 1368 \times 201 = 33652,8 ,$$

d'où $g_3 = 3,6444$ cm.

Quant à l'argent du corps c, son poids sera

$$m - m_3 = 13254 - 9234 = 4020 \text{ gr.}$$

et l'altitude de son centre de gravité

$$\frac{mg - m_3 g_3}{m - m_3} \quad \text{soit} \quad \frac{64180,8 - 33652,8}{4020} = 7,5940 \text{ cm.}$$

On voit que cette seconde méthode conduit aux mêmes résultats que la première. Les deux méthodes ayant fait intervenir de deux façons très différentes certaines propriétés de la pyramide générale à n dimensions, il y a tout lieu de croire que ces propriétés, établies par induction, sont vraies.

Complément.

Nous nous proposons ici de démontrer par déduction, mais sans le secours du calcul intégral, les propriétés fondamentales de la pyramide à n dimensions :

« La capacité de la pyramide à n dimensions est égale au produit de la base par la $n^{\text{ième}}$ partie de la hauteur ;

« la distance de la base au centre de gravité est égale à la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie de la hauteur. »

Il est à remarquer que n peut aussi être plus petit que 3. Pour $n = 1$ on obtient un segment de droite dont une extrémité fera « sommet » et dont l'autre fera « base » ; la « capacité » se réduit à la longueur ou « hauteur », la base étant remplacée par la puissance zéro d'une longueur, c'est-à-dire par l'unité ; le centre de gravité sera le point milieu. Pour $n = 2$ on obtient un triangle, dont la surface est égale au produit de la base par la moitié de la hauteur, tandis que la distance de la base au centre de gravité est le tiers de la hauteur.

Désignons par H la hauteur de la pyramide, par B la base et par V la capacité ; écrivons $V = i\,HB$, i étant un facteur constant. Il s'agit de démontrer que $i = \frac{1}{n}$.

A cet effet supposons qu'on agrandisse très peu la pyramide, simplement en appliquant sur sa base (à $n - 1$ dimensions) une couche d'épaisseur constante e et de capacité Be.

La pyramide augmentée, de capacité V' et de hauteur $H + e$, doit être semblable à la pyramide donnée, de capacité V et de hauteur H ; comme elles sont à n dimensions, on aura donc $\frac{V'}{V} = \left(\frac{H+e}{H}\right)^n = \left(1 + \frac{e}{H}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\frac{e}{H} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{e}{H}\right)^2 \cdots + \left(\frac{e}{H}\right)^n$ en développant d'après la loi du binôme de Newton. $\frac{e}{H}$ étant supposé très petit, nous en négligerons les puissances supérieures et nous poserons simplement

$$V' = V + Vn\frac{e}{H}, \qquad \text{soit}$$

$$V' - V = Vn\frac{e}{H} = iHBn\frac{e}{H} = inBe$$

pour l'agrandissement de la pyramide donnée. Or pour que ce résultat soit compatible avec Be, capacité de la couche ajoutée, il faut qu'on ait

$$in = 1 \qquad \text{soit} \qquad i = \frac{1}{n}.$$

le premier point qu'il fallait démontrer.

Désignons par jH la distance du centre de gravité de la pyramide donnée à la base B, j étant un facteur constant. Il s'agit de démontrer encore que $j = \frac{1}{n+1}$.

Dans ce but continuons à étudier l'effet de la couche additionnelle d'épaisseur e. Cette épaisseur étant très faible par rapport à H, on peut dire que l'adjonction de la couche doit augmenter de HBe le moment de la pyramide par rapport à son sommet, moment qui avait pour mesure W le produit de V par la distance $(1 - j)$ H.

La pyramide augmentée restant semblable à la pyramide primitive, on aura

$$\frac{W'}{W} = \frac{H'V'}{HV} = \left(\frac{H+e}{H}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{e}{H}\right)^{n+1} = 1 + (n+1)\frac{e}{H}$$ en négligeant les puissances supérieures de $\frac{e}{H}$. On aura donc

$$W' - W = W(n+1)\frac{e}{H} = (1-j)(n+1)Ve = (1-j)\frac{n+1}{n}HBe$$

pour l'agrandissement du moment, et ce résultat ne sera compatible avec HBe, moment de la couche$_1$ que si l'on a

$$(1-j)\frac{n+1}{n} = 1 \quad \text{soit} \quad 1 - j = \frac{n}{n+1} \text{ ou } j = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

le second point qu'il fallait démontrer.

J. Sauter et F. Trosset.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Pri la funkcia ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

En mia lasta artikolo *(L'Enseignement mathématique,* 15 sept. 1913, p. 390), mi serĉis ĉiujn mezureblajn solvojn de la ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Mi, por tio, pruvis ke se iu mezurebla solvo estas nula kiam x estas racionala, ĝi estas ĉie nula.

Sed mi ĵus rimarkis ke tiu lasta teoremo estis jam pruvita en 1907 de Sro Lebesgue *(Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XLII, 10 marzo 1907) kaj mi deziras atentigi pri tiu antaŭeco. Lia solvo estas cetere malsimila kaj staras sur la nocio « aro el dua katogorio ».

Poitiers, 1 février 1914. M. Fréchet.
