Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1914)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

cations géométriques (2 h.). — Drach : Conférence de Mécanique rationnelle (2 h.). — Vessiot : Travaux pratiques de Mathématiques générales (1 h.). — Montel : Conférences de Mathématiques générales (2 h.). — Andoyer : Conférences d'Astronomie (1 h.). — Servant : Conférences de Mécanique physique ; Les éléments de la statique graphique (1 h.).

Enseignements et exercices pratiques réservés aux élèves de l'Ecole normale supérieure, par les professeurs E. Borel, Cartan, Vessiot, Lebesgue et Drach.

Collège de France (suite). — M. Gevrey, chargé du cours de la *fondation Peccot,* « Les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Problèmes aux limites et nature des solutions » (2 h.). (Dès le 28 février).

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1914. — 1 vol. in-16 de 700 pages avec figures, 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce Recueil a été, cette année, entièrement remis à jour, en ce qui concerne les Tableaux relatifs à la Physique et à la Chimie.

Cet ouvrage ne se trouvera pas seulement sur la table du technicien, du physicien, du mathématicien ; chacun voudra le consulter pour avoir sous les yeux la liste des constantes usuelles, et aussi pour lire les intéressantes Notices de cette année : celle de M. Bigourdan, Le jour et ses divisions : Les fuseaux horaires et la Conférence internationale de l'heure, et de M. P. Hatt, De la déformation des images par les lunettes.

E. Borel. — **Introduction géométrique à quelques théories physiques.** — 1 vol. gr. in-8° de VII-140 pages et 3 figures, 5 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1914.

On peut, je crois, prédire un grand succès à cet ouvrage qui, à beaucoup de mérites divers, joint celui de la brièveté. On sait l'intérêt et même le grand étonnement soulevé par la physique moderne, avec ses vitesses ayant pour limite la vitesse de la lumière, puis par l'interprétation de la chose à l'aide de la géométrie non-euclidienne[1]. Or M. Borel vient de nous la présenter avec une simplicité et une élégance incomparables, en introduisant d'abord la géométrie hyperbolique où les points à l'infini sur les axes réels remplacent les points cycliques de la géométrie ordinaire. Les deux géométries sont ensuite généralisées dans l'hyperespace qui, dans le cas d'un très grand nombre de dimensions, illustre facilement les fonctions d'un grand nombre de variables. Il est alors aisé de passer aux considérations de mécanique statistique qui ont été particulièrement travaillées par l'auteur depuis quelques années et aussi à certaines questions relevant du Calcul des probabilités. Bien des personnes ont été séduites, de loin, par toutes ces captivantes théories, mais craignaient de ne pouvoir se mettre réellement au

[1] L'*Enseignement mathématique* vient précisément de publier, à ce sujet, un excellent article de M. L. Rougier (ce tome, p. 5).

courant sans un travail énorme dans les publications les plus diverses dues principalement à des physiciens étrangers. La nouvelle œuvre de M. Borel dissipera rapidement de telles craintes. A. Buhl (Toulouse).

P. Boutroux. — **Les principes de l'analyse mathématique.** Exposé historique et critique. Tome I (Les nombres. Les grandeurs. Les figures. Le calcul combinatoire. Le calcul algébrique. Calcul des fonctions. L'algèbre géométrique). — 1 vol. gr. in-8° de XII-548 p. et 221 figures; 14 fr.; A. Hermann, Paris.

Cet ouvrage paraît destiné à intéresser également les mathématiciens purs, les praticiens et les philosophes. L'auteur, qui est d'ailleurs à la fois mathématicien et philosophe, laisse transparaître des opinions d'une simplicité et d'une vérité tranchantes par rapport au malaise d'où sort à peine un enseignement qui, pendant de longues années, a désespérément oscillé entre l'entière rigueur et les procédés simplement pratiques.

L'art de raisonner, nous dit-il dans sa préface, n'est point le plus nécessaire pour une société d'hommes d'action. Quelle belle franchise! Que d'applications on pourrait trouver à ce précepte même en dehors de la science! Combien il changerait l'allure de nos sociétés modernes s'il pouvait être pris en considération beaucoup plus qu'il ne l'est actuellement! Mais ne sortons point de la science.

Nous reconnaîtrons sans peine, dans l'œuvre de M. Pierre Boutroux, toute l'érudition nécessaire aux raisonnements les plus rigoureux, mais aussi le désir de ne point alourdir les admirables lignes des théories séculaires; il retrace très brièvement, en les terminant de manière à ce qu'on puisse y adapter les problèmes modernes. Plus d'un millier de notes, mises au bas des pages, complètent le texte sans en rompre la continuité. L'historique des sujets contient une foule de données trouvables, aurait-on pu croire, seulement chez un spécialiste de l'histoire des mathématiques. Et, à ce sujet, j'ai eu quelques étonnements bizarres et qui probablement seront assez partagés.

Quel rapport, par exemple, entre le mot *ellipse* désignant une courbe et le même mot désignant une figure abréviative dans la construction d'une phrase? Je ne m'étais jamais expliqué la chose. Or elle provient de ce que, chez Apollonius, la construction de certains rectangles *défaillants* (c'est-à-dire *moindres*, *réduits* par rapport à un carré) revient à la construction de la conique fermée. L'ellipse géométrique et l'ellipse littéraire naissent donc bien toutes deux de l'idée de réduction. Et il y a des explications analogues pour l'hyperbole et la parabole.

Il serait superflu d'essayer de citer toutes les matières traitées toujours dans un même esprit d'originalité. D'ailleurs l'un des chapitres, celui qui traite de la démonstration géométrique, a déjà été reproduit par l'*Enseignement Mathématique* (t. XV, 1913, p. 298). En algèbre proprement dite, là où la science paraît toujours un peu plus sèche, l'auteur a su présenter très rapidement une résolution uniforme des équations des quatre premiers degrés, et cela sans s'encombrer des discussions particulières à chaque cas, lesquelles pourraient justement masquer l'uniformité du raisonnement général.

Espérons que les succès scientifiques de M. Pierre Boutroux, qui professe actuellement dans une Université des Etats-Unis, ne l'empêcheront pas de nous livrer rapidement la suite de son œuvre. A. Buhl (Toulouse).

G. Darboux. — **Leçons sur la théorie générale des surfaces.** Tome I (Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima) 2me édition. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-620 p. : 20 fr. : Gauthier-Villars, Paris.

Il serait superflu de vouloir représenter en détail, au public des géomètres, la seconde édition du tome premier de ce magnifique ouvrage. Il est non seulement connus, mais est à la base même de toutes recherches et, pendant les quelques mois qui ont séparé l'épuisement de l'ancienne édition et la publication de celle-ci, l'impatience a été vive. Contentons-nous d'indiquer brièvement les importantes adjonctions qui distinguent le nouveau volume.

On sait que c'est surtout la théorie du déplacement d'un trièdre qui est fondamentale chez M. Darboux. Il y a là des coordonnées mobiles qui, pour l'étude des principales surfaces de la géométrie, se montrent bien supérieures, en simplicité et en souplesse, aux coordonnées relatives à un trièdre fixe. C'est d'abord dans cette théorie du déplacement que nous trouvons de nouveaux développements. Parmi les différents systèmes de variables dus à Euler ont été mentionnés immédiatement les paramètres quaternoniens ; les formules fondamentales pour la courbure et la torsion de courbes gauches ont été retrouvées avec la plus extrême simplicité. Une formule purement géométrique lie la courbure, la torsion et le volume du tétraèdre formé avec quatre points infiniment voisins d'une courbe gauche. Le rôle de la sphère de rayon nul (cône isotrope) est devenu une base fondamentale quant à la notion de déplacement, et d'ailleurs cette dernière a été étudiée de manière nouvelle et plus générale qu'autrefois avant de passer aux déplacements à deux variables qui sont les plus utiles dans la théorie des surfaces.

L'étude des axes des mouvements hélicoïdaux nous mène aussi au conoïde de Plücker dont l'équation seule promet une étude des plus simples. M. Darboux a examiné toutes les façons de l'engendrer : bien que ce conoïde soit du troisième ordre, on l'engendre facilement au moyen de coniques et même de coniques formellement invariables. M. Appell a démontré que *toute surface réglée pour laquelle le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices est une courbe plane, est un cylindre ou un conoïde de Plücker*. Le conoïde est ainsi rattaché à un cylindre, ce qui explique le nom de *cylindroïde* qui lui est souvent donné. MM. Bricard et Demoulin sont revenus sur le même sujet. M. Bricard rattache la question au mouvement d'un cylindre de révolution qui roule dans un cylindre de rayon double avec glissement dans le sens des génératrices ; alors un point du cylindre mobile décrit une courbe plane.

Tout un chapitre a été rajouté sur les surfaces qui peuvent être considérées, de plusieurs manières, comme surfaces de translation. Henri Poincaré s'était occupé de la question et la liait au théorème d'Abel ; M. Darboux n'emprunte rien à ce théorème, mais le retrouve ensuite. Telles sont, très sommairement, les principales transformations du Livre I.

Le Livre II a moins varié. On sait qu'il est consacré aux coordonnées curvilignes et aux réseaux conjugués. Après l'étude des familles conjuguées planes, j'y relève surtout de bien intéressants travaux dus à un géomètre peu connu, Peterson. Il y a là de fort élégantes propriétés concernant les quadriques et les surfaces applicables sur ces quadriques.

Le chapitre sur la représentation conforme a été reporté dans le Livre III mais a été remplacé ici par le problème général de la représentation conforme des surfaces les unes sur les autres.

Dans le Livre III, consacré aux surfaces minima, remarquons surtout les surfaces minima de Lie, qui sont, de plusieurs manières, surfaces de translation.

Puis les surfaces minima réelles engendrées par un cercle, surfaces dont la première idée revient à Riemann, mais que M. Darboux a récemment retrouvées par une analyse tout à fait générale. La représentation conforme des aires planes, reportée en ce Livre, nous familiarise avec les belles idées de Schwarz, qui s'appliquent ensuite aux surfaces minima et nous conduisent jusqu'à des cas particuliers du problème de Plateau (surface minimum passant par un contour donné). Quant à ce dernier problème, il en est toujours à peu près au même point. Dans l'édition de 1887, M. Darboux écrivait : « L'analyse n'a pu, jusqu'ici, imaginer aucune méthode générale permettant de commencer l'étude de cette belle question. » Cette phrase est encore là, tout comme en 1887 ! Le problème va-t-il, tout à coup, faire un pas de géant, comme celui des trois corps, sous l'influence de M. Sundman ? Est-ce à l'école de M. Volterra que reviendra cette nouvelle gloire ?

J'avoue que tout pronostic me semble bien hasardé !

Terminons par une remarque matérielle, mais qui a bien son importance. Les plus grands efforts ont été visiblement faits pour que cette nouvelle édition du premier volume ne cesse de s'accorder avec les volumes suivants. Au point de vue du numérotage des paragraphes, il n'y en a que dix nouveaux. Les autres ont été fondus ou affectés de la mention *bis*. Au total presque tous les paragraphes ont le même numéro dans les deux éditions ; tout renvoi s'accordant avec la première s'accordera, en général, avec la seconde. L'illustre savant qui nous donne ce nouveau livre n'a rien négligé comme professeur.

A. Buhl (Toulouse).

J. Fitz-Patrick. — **Exercices d'Arithmétique.** Enoncés et solutions, avec une préface de J. Tannery. Edition entièrement refondue et considérablement augmentée. — 1 vol. in-8, 707 p. ; 12 francs ; A. Hermann et fils, Paris.

En présentant la première édition de ce recueil, M. J. Tannery a insisté sur la place qu'il convient de maintenir à l'Arithmétique dans l'enseignement secondaire. « Peut-être serait-il sage, écrivit-il, de prévenir les candidats des dangers qu'ils courent en abordant trop tôt les parties élevées des programmes, et de laisser inscrites en tête de ces programmes, les connaissances fondamentales qu'ils supposent. »

L'Arithmétique continue à figurer dans un grand nombre de concours en France et cette nouvelle édition, entièrement refondue et considérablement augmentée, rendra à son tour de grands services aux élèves et aux maîtres. Le recueil renferme plus de 1300 problèmes dont la plupart sont complètement résolus. Ils sont répartis sur 18 chapitres embrassant les diverses parties de l'arithmétique, depuis la numération jusqu'aux régions élevées qui conduisent à la théorie des nombres.

L'ouvrage contient en appendice une intéressante note de M. Ern. Lebon, dans laquelle il expose sa méthode pour former une table des nombres premiers.

H. F.

J. Haag — **Cours complet de mathématiques spéciales.** Trois volumes gr. in-8° avec trois volumes d'exercices résolus ou proposés. Tome I. — *Algèbre et analyse.* Vol. de VI-402 p. avec 44 fig.; 1914; 9 fr. — *Exercices du tome I.* Vol. de VI-220 p. avec 14 fig.; 1914; 7 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

On est assez étonné, par ce temps de mathématiques générales à outrance, de voir paraître un cours de mathématiques spéciales, et surtout un cours qui a la prétention d'être complet. Il faut presque faire un effort pour se rappeler que des élèves de mathématiques spéciales existent encore et qu'on ne peut leur donner l'enseignement intuitif des mathématiques générales; ils se l'assimileraient trop facilement et, interrogés là-dessus, répondraient encore trop facilement ! Comment pourrait-on se sortir alors des concours d'admission à nos grandes écoles ? M. Haag n'a pas été si ironique; il a même pris la chose très au sérieux et nous présente un cours fort moderne, d'autant plus moderne même que les derniers en date semblent s'effacer dans la nuit des temps.

L'arrangement des matières est particulièrement heureux. L'Analyse infinitésimale a la première place et c'est fort naturel, car il est beaucoup plus simple de calculer des intégrales élémentaires que d'étudier, par exemple, la transformation des équations algébriques; mais les anciens auteurs n'osaient pas être aussi naturels que cela. Il est même plus simple d'intégrer les différents éléments provenant de la décomposition d'une fonction rationnelle que de former ces éléments en partant d'une fraction quelconque. Et l'auteur ne peut être que félicité d'avoir respecté l'ordre ainsi indiqué D'ailleurs le souci pratique est constamment visible. Après les critères de convergence concernant les séries, nous trouvons quelques raisons intuitives destinées à indiquer aux débutants qu'ils ne doivent pas attendre indifféremment les mêmes services de tous ces critères. Les infiniment petits sont fort bien définis par continuité. Et quand, dans la seconde moitié du volume, nous arrivons à l'Algèbre proprement dite, nous y trouvons une parfaite élégance. Le théorème de Bezout sur l'élimination est ramené à son idée essentielle qui est simple ; ce n'est qu'ensuite que nous voyons les difficultés particulières qui peuvent se présenter, et ainsi elles n'obscurcissent pas tout de suite ce Mémoire fameux et redoutable.

En résumé, ce cours est fort clair, peu encombré d'inégalités, on y calcule beaucoup et le souci de faire résoudre un grand nombre d'exercices est suffisamment attesté par le fait de les publier à part, en volumes séparés. Ces problèmes sont intéressants, d'une part parce que beaucoup sont simples et immédiatement faisables par des procédés harmonieux que l'on peut suivre *sur des figures,* quoiqu'il ne s'agisse ici que d'algèbre et d'analyse, et cela est vraiment très bien. D'autre part, certains problèmes initient sans longueurs à des théories qui n'ont pu être traitées dans le corps de la partie didactique.

Une grande symétrie règne partout. Il ne serait point étonnant que cet ouvrage devienne rapidement classique. A. Buhl (Toulouse).

K. Hensel. — **Zahlentheorie.** — 1 vol. in-8° de XII-356 pages, 10 M.; G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Berlin und Leipzig, 1913.

Dès ses premiers travaux M. Hensel a cherché à utiliser et à mettre en lumière les analogies qui existent entre les propriétés des nombres et celles des fonctions. Cette tendance apparaît dans ses remarquables recherches sur la théorie des fonctions algébriques, où les considérations arithmétiques jouent un si grand rôle ; elle s'accentue dans ses travaux arithmétiques et surtout dans sa théorie des nombres algébriques, dont il a donné il y a cinq ans un exposé détaillé dans son livre « Theorie des algebraischen Zahlen », analysé ici-même par M. Dumas (Cf. *Ens. Math.*, 1910, p. 440) ; elle se dessine plus nettement encore dans son ouvrage récent « Zahlentheorie », consacré aux éléments de la théorie des nombres. Certes, quelques-unes des analogies utilisées par M. Hensel avaient été aperçues avant lui, mais personne ne s'en était servi d'une manière aussi systématique.

Pour rapprocher ces deux domaines, apparemment si distincts : la théorie des nombres et la théorie des fonctions, M. Hensel, comme l'a très bien expliqué M. Dumas dans sa note de l'*Ens. Math.*, emprunte à la théorie des fonctions son instrument de recherches le plus puissant : les développements en série, qui lui fournissent ses fameux développements ou nombres *g-adiques*. C'est en partant de cette notion aussi simple que féconde que M. Hensel réussit à reconstituer les éléments de la théorie des nombres et la théorie des corps algébriques, et parvient en particulier à la conception profonde de ses diviseurs, équivalente, à un certain point de vue, à celle d'idéal de Dedekind.

Dans son nouvel ouvrage M. Hensel parcourt un domaine moins vaste : il s'en tient, comme nous l'avons déjà dit, aux éléments de la théorie des nombres, mais ses méthodes de recherches s'appliquent encore à l'étude des corps plus élevés, et rien ne serait plus facile que de passer de ces éléments à la théorie des nombres algébriques. Aussi le livre de M. Hensel pourrait-il servir d'introduction à sa « Theorie der algebraischen Zahlen », mais sa portée est plus grande : dans le domaine restreint qu'il embrasse, il est infiniment plus complet et abonde en idées et conceptions nouvelles.

Pour M. Hensel, le problème fondamental de la théorie des nombres est la recherche des relations (Beziehungen) qui existent entre tous les nombres rationnels m et un nombre fixe mais quelconque g, qu'il appelle « *Grundzahl* » ou module. Ce qu'il importe de savoir c'est donc la manière dont les nombres m se comportent vis-à-vis du module g.

Dans certains problèmes très élémentaires, un nombre m peut être remplacé par son reste module g, mais dans l'étude de questions plus complexes cette donnée pourrait ne pas suffire : un nombre m n'est caractérisé d'une manière complète par rapport au module g que par la suite totale des termes que fournit son développement en série suivant les puissances croissantes du module g. On voit que les nombres *g-adiques* peuvent être introduits de la manière la plus naturelle dès le début de la théorie des nombres.

Nous voilà donc en présence d'un ensemble de symboles, car les nombres *g-adiques* ne sont en général que des symboles, ensemble plus vaste que le corps des nombres rationnels dont on est parti. Ces symboles peuvent être soumis au calcul : on peut les ajouter, les soustraire, les multiplier les uns par les autres, sans sortir de l'ensemble des nombres *g-adiques*. Cet ensemble forme donc un domaine holoïde ou un anneau, qui, dans le cas où g est un nombre premier p et où la division est toujours possible, devient un domaine orthoïde ou un corps.

Mais M. Hensel montre que l'anneau des nombres *g-adiques* peut être décomposé en corps relatifs aux différents facteurs premiers de g, ce qui permet de ramener l'étude des nombres *g-adiques* quelconques à celle beaucoup plus simple des corps *p-adiques*.

Une notion importante, celle d'ordre, permet de rapprocher encore davantage la théorie de ces corps de celle des fonctions. M. Hensel appelle ordre d'un nombre *p-adique* le degré de son premier terme par rapport à p. Cet ordre peut être négatif, nul ou positif.

Soient maintenant deux nombres *p-adiques* A et A' d'ordres ρ et ρ' ; on dira que A est plus petit que A', si ρ est supérieur à ρ'. En vertu de cette convention, un nombre variable *p-adique* est d'autant plus petit que son ordre est plus grand, et sa grandeur ou son rang relatif est donné non pas par son ordre ρ, mais par l'inverse de ρ. Rien ne nous empêche maintenant d'introduire dans la théorie de ces corps les notions et les procédés du calcul infinitésimal : les notions de continuité, de convergence, de dérivée, etc., et d'étudier relativement à p les fonctions algébriques ou transcendantes envisagées dans l'analyse. Le parallélisme entre l'arithmétique et la théorie des fonctions s'accentue de plus en plus : c'est ainsi que l'étude de la fonction exponentielle fournit à M. Hensel une expression des nombres *p-adiques*, analogue à la relation classique $A = e^{\gamma}$, où $\gamma = lg A$; mais ici le facteur exponentiel ne figure pas seul, — il est nécessaire d'introduire deux autres facteurs de nature différente : une puissance de p et une puissance d'une racine $(p - 1)^e$ de l'unité. Un nombre *p-adique* est donc caractérisé par trois indices, et c'est l'ensemble de ces trois indices que M. Hensel appelle *logarithme* du nombre A. La portée et l'utilité de cette notion est comparable à celles des logarithmes ordinaires, et il serait intéressant de la rapprocher aussi de ces expressions logarithmiques dont Kummer s'était servi dans ses belles recherches sur le théorème de Fermat et les lois de réciprocité.

Les notions introduites par M. Hensel simplifient singulièrement l'étude des congruences et des équations binômes ; elles permettent aussi d'approfondir la théorie des nombres *g-adiques*. En effet la plupart des résultats établis pour les corps *p-adiques*, s'étendent, avec des modifications légères, aux anneaux *g-adiques;* en particulier le logarithme d'un nombre *g-adique* est représenté aussi par une suite d'indices, mais au lieu de trois indices isolés, cette suite se compose de trois systèmes ou cortèges d'indices ; à part cette différence, les propriétés des logarithmes subsistent, et les questions relatives aux congruences ou aux équations binômes se traitent à l'aide de méthodes analogues.

Les deux derniers chapitres du livre de M. Hensel sont consacrés à la loi de réciprocité et à l'étude des formes quadratiques binaires et ternaires. Examinées à la lumière des belles méthodes de M. Hensel, ces questions, depuis longtemps classiques, apparaissent sous un aspect inattendu et nouveau.

Je ne saurais, même brièvement, indiquer tous les sujets abordés par M. Hensel dans cette arithmétique *g-adique*, où sa pensée se meut avec aisance et souplesse, qui en rendent la lecture particulièrement attrayante et facile. Malgré l'originalité de ses méthodes et la variété des problèmes qui y sont traités, ce livre, pour être pleinement compris, n'exige aucune préparation spéciale.

D. Mirimanoff (Genève).

J. Knoblauch. — **Grundlagen der Geometrie.** — 1 vol. in-8, 634 p. ; 18 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

M. Knoblauch, professeur à l'Université de Berlin, a publié il y a 25 ans, une introduction à la Géométrie des surfaces. Depuis cette époque il n'a cessé de suivre le développement de la Géométrie supérieure et y a donné lui-même d'intéressantes contributions. Dans ce nouvel Ouvrage il présente *les fondements de la Géométrie différentielle* en s'efforçant à faire ressortir les méthodes qui sont propres à cette branche de la Géométrie. Il expose d'une façon systématique les notions essentielles indispensables à ceux qui veulent aborder l'étude plus approfondie de la Géométrie des surfaces, telle qu'elle se trouve exposée dans l'Œuvre magistrale de M. Darboux ou dans les mémoires originaux.

Voici l'énumération des principaux objets traités par l'auteur :

Introduction à la théorie des courbes gauches. — Formules fondamentales de la théorie des surfaces. — Théorie de la courbure. — Théorie des formes différentielles binaires. — Les trois équations fondamentales. — Courbes tracées sur une surface. — Représentation sphérique ; surfaces réglées. — Théorie de la déformation. — Théorie générale des courbes et des réseaux tracés sur une surface. — Invariants et covariants d'ordre donné. — Equations de Weingarten. — Théorèmes et problèmes spéciaux de la théorie des surfaces.

L'ouvrage se termine par une liste bibliographique limitée aux mémoires classiques de la théorie des surfaces, puis une table des notations employées, enfin un répertoire analytique des matières.

L. Lecornu. — **Cours de Mécanique** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. — 1 vol. gr. in-8° de VII-536 pages et 281 figures, 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1914.

Ce cours de Mécanique peut être caractérisé par son allure à la fois pratique et originale. L'enseignement de l'Ecole Polytechnique doit être hautement scientifique et cependant il s'adresse surtout à de futurs praticiens ; M. Lecornu a très heureusement concilié les deux choses en ne sacrifiant jamais l'exposé mathématique de la méthode et en appliquant celle-ci, non à des systèmes plus ou moins fantaisistes, mais aux mécanismes et machines se rencontrant dans la pratique.

L'exposé de la Cinématique justifie déjà cet ordre d'idées : d'abord la partie géométrique, poussée notamment jusqu'au théorème de Savary ; puis la Cinématique proprement dite avec ses compositions de vitesses et d'accélérations ; enfin la très élégante étude d'une riche collection de mécanismes. L'auteur adopte la classification de Willis qui suppose une pièce conductrice en rotation uniforme et une pièce conduite ; le mécanisme est dit de première, de deuxième ou de troisième classe, suivant que le rapport de transmission est constant en grandeur et en signe, ou constant seulement en signe, ou enfin variable en signe. Dans chaque classe on distingue trois genres suivant que la transmission a lieu par contact direct, par intermédiaire rigide ou par intermédiaire flexible. Je ne puis analyser ici en détail les neuf groupes qu'on peut définir ainsi ; qu'il me suffise de rappeler les engrenages (cl. 1 ; g. 1), les bielles (1 ; 2), les courroies (1 ; 3), les courbes roulantes diverses (2 ; 1), les manivelles et joints (2 ; 2), les courroies sur poulies quelconques (2 ; 3), les excentriques (3 ; 1), les manivelles et balanciers, le parallélogramme de Watt, l'inverseur Peaucellier, la coulisse de Stephenson (3 ; 2). La catégorie (3 ; 3) n'existe pas.

Au début de la dynamique nous trouvons d'abord les questions de mesure, d'homogénéité, de similitude. L'attraction newtonienne est introduite immédiatement et donne ainsi une réalité aux actions à distance dont il faudra, bon gré, mal gré, parler dans bien des problèmes physiques. Le mouvement d'un point amène à de beaux développements sur les problèmes balistiques, problèmes dans lesquels les hodographes sont étudiés avec autant de détails que les trajectoires.

Les mouvements d'un point sur une ligne sont illustrés par les divers pendules et par l'ingénieuse recherche de la courbe qui doit être décrite, avec pression constante, par un point pesant; on a, là encore, de fort intéressantes considérations relativement à l'hodographe décrit d'un mouvement képlérien. Les mouvements relatifs nous conduisent à la chute des corps à la surface de la Terre et au pendule de Foucault soigneusement étudié quant à certaines causes secondaires qui peuvent affecter le mouvement du plan d'oscillation et se superposer fâcheusement à l'effet dû à la rotation de la Terre.

Toutes ces considérations dynamiques relatives au point comprennent, comme cas particulier, la statique du point. Ce n'est qu'ensuite que l'ouvrage expose la statique des systèmes et c'est encore là une marche fort avantageuse au point de vue pratique, car non seulement la statique des systèmes est plus compliquée que la dynamique du point, mais cette dernière est surtout propre à familiariser rapidement le lecteur avec les principes de la mécanique. En particulier, il est fort désirable que la notion de travail, surtout celle de travail virtuel qui intervient en Statique, soit d'abord éclaircie par quelques considérations dynamiques que l'on trouve facilement dans la Dynamique du point. Observons aussi que M. Lecornu ne cherche pas à *établir* que les réactions sont normales lors de l'absence du frottement; il admet la chose et dit qu'il y a frottement quand la réaction devient oblique.

Après la Statique des courbes funiculaires, nous trouvons celle des lames et des tiges et enfin celle des solides naturels. Nombreux sont les appareils industriels qu'étudie M. Lecornu; je cite, au hasard, l'échelle, le valet de menuisier, le coin, le plan incliné, les cônes de friction, les coquilles, presses, encliquetages, treuils, poulies avec corde flexible ou raide, etc., etc. Tout cela est d'une lecture fort attrayante et rappelle la cinématique des mécanismes signalée plus haut.

Si l'on ajoute que ce premier volume n'est que le tiers de l'œuvre annoncée, on pressent déjà que l'éminent auteur travaille à un exposé qui jouera sans doute un rôle considérable dans la Mécanique à la fois théorique, pratique et, de plus, très simplement enseignée. A. Buhl (Toulouse).

Fr. Riesz. — **Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.** — 1 vol. gr. in-8° de VI-182 p., 6 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Voici un ouvrage que l'on pourrait rapprocher avec grand profit de celui de M. Volterra analysé plus bas. Des deux côtés on assiste à la généralisation de l'algèbre lorsque le nombre des variables ou des inconnues augmente indéfiniment. Mais, alors que M. Volterra paraît continuellement servi par une admirable continuité, par des passages à la limite qui semblent se justifier d'eux-mêmes, M. Riesz discute avec un appareil plus rigoureux et va même au-devant des cas singuliers. J'ajoute tout de suite que ceci n'est pas fait sans élégance; c'est surtout l'antique inégalité de Lagrange-Cauchy, convenablement généralisée qui sert de base aux raisonnements et nous aide à juger de la convergence des déterminants infinis. L'auteur a eu aussi grand soin d'asseoir son analyse sur tous les précédents qui y ont conduit naturellement. Il invoque d'abord la détermination par récurrence des coefficients de certaines séries et le procédé de même type employé par Fourier dans la théorie de la chaleur; il rappelle ensuite un procédé, déjà beaucoup plus nouveau, qui fut employé par M. Appell pour établir certaines formules de la théorie des fonctions elliptiques, procédé qui fut repris par Poincaré et qui contient déjà, en somme, un usage de déterminants d'ordre infini. Rappelons ensuite que Poincaré devait à nouveau reprendre ces déterminants pour justifier l'emploi qu'en faisait implicitement Hill dans sa théorie de la Lune et ceci nous expliquera pourquoi, dans le présent livre, nous trouvons tout un chapitre sur les équations différentielles linéaires. Naturellement les équations intégrales ordinaires servent de conclusion.

Au sujet de toutes ces extensions algébriques, on peut faire une remarque qui ne surprendra plus personne, mais qui aurait semblé bizarre il y a vingt ans. On distinguait alors l'analyse infinitésimale et l'algèbre. Aujourd'hui les progrès de l'analyse sont, en grande partie, empruntés à l'algèbre ; la séparation ne semble plus possible, et il serait bizarre de voir quelqu'un chercher à apprendre la théorie des formes linéaires ou quadratiques à une infinité de variables sans posséder d'abord les connaissances purement algébriques relatives au nombre fini. Toutefois, des ouvrages comme ceux de M. Riesz faciliteront les choses, car cet excellent auteur a rappelé très nettement et très simplement tous ses points de départ purement algébriques.

A. BUHL (Toulouse).

Hermann WEYL. — **Die Idee der Riemannschen Fläche.** [Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen.] — 1 vol., 169 p. ; 7 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ami lecteur, si tu as lu dans un traité d'Analyse les chapitres relatifs à la théorie des surfaces de Riemann et des fonctions algébriques ; si, saisi par la beauté de cette théorie, tu t'intéresses aux recherches récentes sur l'uniformisation des fonctions analytiques ; si, enfin, tu désires connaître une exposition *rigoureuse* et *originale* des surfaces de Riemann et de leur signification profonde pour la théorie des fonctions, prends ce livre, lis-le et relis-le. Sa lecture te semblera l'ascension d'une haute montagne. Tel l'alpiniste, arme-toi de courage ; l'ascension sera dure. A certains moments la rigueur et la minutie du raisonnement, tels les contours du sentier, cacheront la cime à tes yeux. Mais, d'étape en étape, tu t'en rapprocheras. Et combien seras-tu récompensé, lorsque, ayant atteint le sommet, tu domineras le vaste panorama de la théorie des fonctions, que tu en suivras d'un coup d'œil les grandes idées directrices, vallées qu'aura suivies ton sentier et que tu reconnaîtras leurs connexions aux cols qu'il aura franchis.

A lire plusieurs des livres qui traitent des surfaces de Riemann, tu pourrais croire que leur utilité consiste à rendre intuitive et facilement saisissable la théorie des fonctions non uniformes. Mais, ce serait méconnaître la véritable portée et l'importance de la conception géniale de Riemann que de la réduire à être uniquement une représentation commode de faits analytiques. L'idée de la surface de Riemann pénètre au cœur de la notion de fonction analytique. Cette idée, encore un peu confuse chez Riemann, a été dégagée magistralement par M. Félix Klein dans son opuscule : « Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig

1882. » ; rien de plus intéressant et de plus suggestif que l'heureux mélange d'intuition physique et de raisonnement mathématique contenu dans cet ouvrage. Mais si l'esprit de Weierstrass et de Cantor a soufflé sur toi, tu ne te sentiras pas entièrement satisfait tant que tu n'auras pas donné une base arithmétique rigoureuse aux notions d'analysis situs qui interviennent dans l'exposition de la théorie des surfaces de Riemann.

C'est à te donner cette base rigoureuse qu'est consacrée la première partie du livre de M. Weyl. Tu y trouveras une exposition exacte du rapport qu'il y a entre les notions de fonction analytique et d'« analytisches Gebilde » de Weierstrass d'une part et de surface de Riemann d'autre part. Tu y trouveras encore une détermination précise de la notion de surface et en particulier de la notion de surface de Riemann. Une démonstration rigoureuse des théorèmes d'analysis situs nécessaires à la théorie des fonctions clôt cette première partie.

La seconde partie du livre traite des fonctions sur une surface de Riemann. M. Weyl établit d'abord, au moyen du principe de Dirichlet, l'existence de fonctions uniformes sur une surface de Riemann donnée. La théorie des fonctions sur une surface fermée fait l'objet de quelques chapitres. La fin de l'ouvrage traite de l'uniformisation des fonctions analytiques. Cette théorie, créée par Poincaré et Klein et que Kœbe vient d'asseoir solidement, forme le couronnement du livre, car c'est dans la relation entre les surfaces de Riemann et les groupes de mouvements du plan non-euclidien que transparaît le mieux *l'idée* de la surface de Riemann.

C'est à Riemann, à Klein et à Poincaré que nous devons principalement les idées qui forment le corps du livre de M. Weyl. Mais M. Weyl a su y marquer son empreinte personnelle. Et d'abord, l'exposition *rigoureuse* de la théorie de Riemann témoigne d'un travail et d'un talent que l'on ne saurait trop estimer. Le livre contient plusieurs choses nouvelles et dignes d'attention. Qu'il me suffise de citer : l'introduction dès le début des « Überlagerungs flächen », la définition de la surface simplement connexe et celle du genre d'une surface. A noter aussi la démonstration nouvelle que M. Weyl donne du principe de Dirichlet. Cette démonstration, inspirée par les travaux de Hilbert, Zaremba, B. Levi, en diffère par le point de départ ; elle est plus simple et plus puissante. M. Plancherel (Fribourg).

L. Zoretti. — **Leçons de mathématiques générales**, avec une préface de M. P. Appell. — 1 vol. gr. in-8° de XVI-753 p. et 205 figures ; 20 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Nous ne saurions mieux faire, pour présenter ces nouvelles leçons, que de reproduire la magistrale préface de M. Appell, non seulement parce qu'elle fait honneur à M. Zoretti, mais parce qu'elle expose les idées de l'éminent doyen de la Faculté des Sciences de Paris, idées qui ont une place toute indiquée dans cette Revue.

« C'est un fait bien connu que le baccalauréat, envisagé au point de vue scientifique, malgré sa prétention surannée d'être le premier grade de l'Enseignement supérieur, n'est même pas un certificat de capacité à recevoir cet enseignement.

« Pour combler cette lacune, les Facultés des Sciences ont dû créer un enseignement préparatoire à l'étude des Sciences mathématiques et des Sciences physiques, enseignement sanctionné par un certificat d'études supérieures de Mathématiques générales ou préparatoires.

« Déjà l'enseignement nouveau, organisé dans toutes les Facultés des Sciences, a attiré un grand nombre d'étudiants qui ont dù reconnaître qu'une base mathématique solide est indispensable à toute étude scientifique sérieuse, théorique ou pratique. Futurs mathématiciens, futurs physiciens, futurs ingénieurs électriciens, mécaniciens ou chimistes, conducteurs des Ponts et Chaussées et contrôleurs des Mines, jeunes filles se destinant à l'Enseignement public, se forment aux cours de Mathématiques générales. Les matières de ce nouvel enseignement sont imposées par la nature des choses. Ce sont les matières des cours de Mathématiques spéciales, enseignées avec plus d'élévation et de souplesse, plus d'applications et d'exercices numériques, sans les soucis étroits de concours artificiels en vue desquels, comme le disait Joseph Bertrand, on *prépare* au lieu d'*instruire*.

« Plusieurs cours de Mathématiques générales ont déjà été publiés. Je demande la permission de présenter au public celui de M. Zoretti. L'auteur était particulièrement qualifié pour l'écrire ; il est, en effet, un ancien professeur de Lycée et il connaît toutes les finesses de cette gymnastique intellectuelle qui prépare de brillants sujets pour les grands concours ; il est aussi un savant, auteur de recherches personnelles sur la théorie des fonctions, qui professe la Mécanique rationnelle dans une de nos Universités et qui a conscience des besoins de l'Enseignement supérieur théorique et technique.

« Voici comment il a conçu l'enseignement des Mathématiques générales dans les Facultés. Cet enseignement s'adresse à un public divers par ses origines, par sa mentalité, par ses besoins et par ses destinées. Le Livre doit donc ne sacrifier aucune de ces catégories et cette condition est difficile à réaliser, car les connaissances utiles aux uns et aux autres diffèrent par l'étendue et par la nature. M. Zoretti a résolu la question en traitant le *programme maximum*, mais en le traitant de manière que les divers chapitres soient aussi indépendants les uns des autres que possible. On trouve, dans cette préoccupation de M. Zoretti, l'explication de la longueur de son Livre : le professeur ne devra pas l'enseigner entièrement : il se bornera à enseigner les théories générales et à faire faire de nombreux exercices, de façon que l'étudiant n'ait pas de difficulté à compléter son information tout seul, soit immédiatement, soit plus tard, avant ou après son entrée dans la vie active. C'est le souci de cette initiation à l'étude personnelle qui, à mon avis, rend tout à fait indispensable un Livre qui soit autre chose qu'un cours, et qui tienne un peu de l'aide-mémoire. C'est aussi, en vue de cette initiation, que M. Zoretti s'est appliqué à remplir une condition plus importante que celle de la belle ordonnance didactique : celle de la commodité.

« Le Livre de M. Zoretti se différencie d'abord des Traités qui ont été spécialement écrits pour telle ou telle catégorie d'étudiants en ce qu'il s'adresse à toutes. L'auteur a sacrifié toutes les difficultés d'ordre théorique, se contentant d'appels à l'intuition où à des images concrètes. Il a également sacrifié les théories générales sans emploi en Mécanique et en Physique, comme, par exemple, toute la théorie des coniques et des quadriques, et, comme conséquence, celle de l'homographie et de l'involution. Il ne parle de ces courbes ou de ces surfaces qu'au point de vue de leurs applications, en insistant spécialement sur leur dessin. A propos des théories de M. d'Ocagne sur les abaques, il se borne à montrer par de nombreux exemples le parti que l'élève pourra tirer des méthodes graphiques, sans qu'il soit nécessaire d'introduire toute la terminologie et tous les procédés bien spéciaux de la nomographie, qui masquent, pour l'étudiant, la généralité de la méthode.

« Les divergences avec les autres Traités sont plus grandes encore dans le choix des exercices. L'auteur a multiplié les exercices d'application purement numérique, proposés, au cours des Chapitres, immédiatement après les théories qu'ils illustrent. Il a indiqué de nombreux exercices qui sont de véritables travaux pratiques : dessins ou épures, cartonnages, mesures effectuées au moyen d'instruments. Son expérience personnelle à Caen lui a montré que les élèves apportent un vif intérêt à ce genre de travaux. L'auteur a su éviter l'erreur qui consiste à introduire, à propos d'exercices, des notions nouvelles qui rebutent le lecteur, et que l'élève, suivant une habitude d'esprit constante, croira devoir apprendre, au détriment des grandes théories qu'il oubliera.

« En résumé, l'Ouvrage de M. Zoretti constitue une conception élevée et nouvelle de l'enseignement des Mathématiques générales. Tout en conservant une entière rigueur, sans laquelle aucune éducation mathématique n'existe, l'auteur a su répondre à tous les besoins essentiels des Sciences expérimentales; par le choix des applications et des exercices numériques, il fait comprendre les théories générales, il développe l'esprit de curiosité, le goût du travail et de la lecture personnels; il tend, en un mot, à former des hommes de réflexion et d'action, capables de servir utilement la France dans la Science et dans l'Industrie. »

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht. Leipzig. — Band 44. Nos 9-12. — Felix Müller : Versuch einer Gruppierung der neueren mathematisch-historischen Schriften (1887-1911). — B. Funk : Die Kleinsche Einführung des Logarithmus. — Prof. Diesing : Zur Konstruktion konjugierter Durchmesser eines beliebigen Kegelschnittes. — Chr. Lenhardt : Aufgaben über Stellungen der Uhrzeiger. Eine Stunde in Obertertia. — Wilh. Effenberger : Zur graphischen Lösung kubischer Gleichungen. — Milan Zdelar : Der Pythagoreische Lehrsatz. — P. Kiesling : Wie bestimmt man in der Schule die Neigung und die Knoten der Mondbahn. — Dr. Karl Krüse : Der Schwerpunkt im Dreieck. — B. Reismann : Ueber die graphische Behandlung von Zinseszins- und Rentenaufgaben. — Prof. Leman : Ueber die reziproken Gleichungen. — Otto Förster : Geometrische Darstellung einer besonderen Art unendlicher Reihen. — W. W. : Der Lehmus-Steinersche Satz. — H. Pfaff : Die Konische Loxodrome. — I. J. Schwatt : On the sum of a family of series.

A partir du 1er janvier 1914, cette revue, qui entre dans sa 45e année, sera dirigée par MM. H. Schotten, W. Lietzmann et E. Grimsehl. *Ce dernier représente plus particulièrement les sciences physiques. Quant à M. Lietzmann, il n'est guère nécessaire de le présente à nos lecteurs; il est suffisamment connu par son active collaboration aux rapports publiés sur l'enseignement mathématique en Allemagne.*