

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 17 (1915)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** Emile Borel. — Leçons sur la Théorie des fonctions. Eléments et principes de la théorie des ensembles avec applications à la théorie des fonctions. 2e édition, 1 vol. gr. in-8° de xii-260 p.; 7 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

**Autor:** Buhl, A.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## BIBLIOGRAPHIE

---

Emile BOREL. — **Leçons sur la Théorie des fonctions.** Eléments et principes de la théorie des ensembles avec applications à la théorie des fonctions. 2<sup>e</sup> édition, 1 vol. gr. in-8° de XII-260 p. ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

La seconde édition de cet ouvrage ne diffère matériellement de la première que par l'adjonction de Notes constituées elles-mêmes par des publications dues, en très grande partie, à l'auteur et effectuées dans différents recueils périodiques. Il serait donc possible, à la rigueur, d'analyser ce nouveau volume en renvoyant simplement à d'autres analyses déjà faites, mais ce serait singulièrement méconnaître la pensée de M. Borel.

Depuis dix-sept ans que l'œuvre a inauguré la *Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*, la théorie des ensembles a acquis un tel développement qu'il aurait fallu, pour la remanier, la fondre avec une foule d'autres œuvres ; mieux valait la simplicité primitive avec des adjonctions indiquant les principales voies parcourues par la pensée mathématique de par l'acquisition de la notion d'ensemble. Je puis donc écrire une analyse qui n'apprendra rien aux géomètres de ma propre génération, mais qui pourra réattirer fort utilement l'attention des jeunes sur un sujet qu'il y a tout intérêt à reprendre au début, sous une forme primitive simple et claire.

Deux *ensembles* se sont imposés de tout temps non seulement aux géomètres, mais aux hommes en général ; celui des *nombres entiers* et le *continu*. Les éléments des ensembles *dénombrables* peuvent toujours être numérotés au moyen de la suite des entiers ; ils sont dits *de première puissance* ; le continu est *de seconde puissance*. Tout d'abord on peut, sans aller plus loin, revenir sur ces notions qui semblent intuitives et voir qu'elles sont loin d'être aussi claires, au point de vue purement logique, qu'on est d'abord porté à le croire. Ainsi l'ensemble des points intérieurs à un carré a même puissance que l'ensemble des points qu'on peut considérer sur un côté. On peut aussi détruire le continu en lui enlevant un certain ensemble d'intervalles et en conservant cependant un ensemble qui, s'il n'est plus le continu ordinaire, en a du moins la puissance (p. 44). C'est même une telle conception, paradoxale au premier abord, qui pourrait à elle seule forcer à l'introduction de la notion de *mesure* d'un ensemble. Au point de vue géométrique élémentaire, le continu seul semble susceptible de mesure, et, rien qu'à ce point de vue, la notion est capitale ; sa généralisation pour autre chose que le continu a été la source des plus puissants et des plus captivants progrès faits par la théorie des fonctions et la théorie de l'intégration.

En dehors de ces aperçus, de forme un peu paradoxale, signalons qu'une des démarcations les plus indispensables à approfondir entre le dénom-

brable et le continu se rencontre dans la distinction des nombres *rationnels* et *irrationnels*. Que de profonds sujets d'étonnement il y a dans la seule comparaison des deux choses; sans les nombres irrationnels, pas de continu, et ces nombres irrationnels sont effroyablement difficiles à définir, à reconnaître, à grouper. On peut artificiellement, comme le faisait Liouville, construire des nombres que l'on saura être en dehors du dénombrable, mais ils ne correspondront guère à des problèmes réels non créés exprès pour obtenir la génération en question. On pourra alors prendre  $e$ ,  $\pi$ , la constante d'Euler, voir si l'on peut ou non les ranger parmi les nombres *algébriques*. Or la question n'est résolue que pour  $e$  et  $\pi$ . Non vraiment, l'intime constitution du continu n'est pas chose logiquement simple.

Parmi les applications préliminaires les plus importantes, signalons la théorie du prolongement analytique. Une fonction analytique peut être définie par un ensemble dénombrable de séries entières. Le problème du prolongement consiste à savoir enchaîner ces éléments les uns aux autres; on peut le résoudre d'une infinité de manières. Mais le problème ainsi résolu appelle encore de nombreux perfectionnements; pratiquement, une infinité, même dénombrable, de séries entières ne saurait être considérée. Alors se pose la question de trouver d'autres développements valables dans des régions de plus en plus étendues; c'est là que naissent les développements en séries de fractions rationnelles, en séries de polynômes, en séries sommables, etc. C'est peut-être sur ce point qu'il faut plus spécialement inviter le néophyte à se reporter rapidement aux autres volumes de la *Collection*.

Tout ceci termine le corps principal du volume; il faut d'abord y adjoindre trois notes, déjà publiées dans la première édition, sur *La notion de puissance*, *La croissance des fonctions* et *La notion de fonction en général*. Tout d'abord il faut approfondir la notion générale de puissance et montrer qu'au delà du continu il y a des ensembles de toutes les puissances possibles; on y arrive en montrant qu'au delà d'un ensemble donné il y a toujours un ensemble de puissance supérieure d'une unité au moins. Soit  $f(x)$  une fonction ne prenant jamais, quel que soit  $x$ , que les valeurs 0 ou 1 mais bien déterminée quand on donne  $x$ . Elle permet de faire correspondre à l'ensemble dénombrable type 1, 2, 3, ... un nombre tel que

$$0, 1011010001101 \dots$$

qui, dans le système binaire, peut être un nombre rationnel ou irrationnel quelconque; l'ensemble de tels nombres a la puissance du continu. Si maintenant  $x$  est dans le continu, une seule des fonctions  $f(x)$  sera élément d'un ensemble de puissance supérieure à celle du continu. Pour que cette affirmation soit remplacée par une véritable démonstration, je ne puis évidemment que renvoyer à l'ouvrage de M. Borel, mais elle a un caractère manifestement intuitif, qui montre bien que la théorie des ensembles a aussi ses procédés d'intuition grandement propres à faciliter la découverte.

Pouvons-nous maintenant nous représenter ces ensembles ayant une puissance plus élevée que celle du continu, pouvons-nous en avoir une représentation tangible comparable à celle qui concerne les êtres géométriques? La question est épineuse: elle a donné lieu et donne encore lieu à bien des discussions.

De même la théorie de la croissance des fonctions nous montre qu'après

avoir rangé des fonctions croissant de plus en plus vite suivant un ensemble dénombrable, on peut, en cherchant à continuer le rangement, sortir de cet ensemble. L'infini ordinaire correspondant à la suite des nombres entiers ne suffit pas ici ; il faut faire intervenir un *infini nouveau* ou *transfini*.

De là des polémiques entre MM. Hadamard, Borel, Lebesgue, Baire, fort suggestives à coup sûr, mais où chacun a peut-être conservé une partie de ses positions.

Signalons aussi que le public extramathématique a été mis au courant de telles questions par des articles élémentaires mais extrêmement soignés, publiés par la *Revue philosophique*, la *Revue du Mois*, la *Revue de Métaphysique et de Morale*. Ces articles, que M. Borel nous redonne ici, pourront être d'une étude extrêmement précieuse pour le débutant. Il pourra y acquérir facilement des idées générales qu'il transformera ensuite en idées vraiment mathématiques en revenant à la première partie du volume. Ce sont ces *Polémiques sur le transfini* qui constituent une quatrième Note, laquelle est la première pour la nouvelle édition. La suivante est consacrée aux *Probabilités dénombrables* ; ces probabilités se placent entre les problèmes d'analyse combinatoire où tous les éléments sont en nombre fini et les probabilités dites géométriques où les éléments forment des ensembles continus.

La dernière Note s'intitule *La théorie de la mesure et la théorie de l'intégration*. M. Borel cherche à revenir, par ses propres méthodes, aux si importants résultats dus à M. Lebesgue. Je n'ai ici que quelques lignes pour montrer comment la mesure et l'intégration sont intimement liées et je ne puis le faire, à coup sûr, que d'une façon bien grossière. Considérons cependant l'archaïque définition de l'intégrale qui correspond à une aire limitée par une courbe continue ordinaire  $y = f(x)$ , par l'axe  $Ox$  et par deux ordonnées d'abscisses  $a$  et  $b$ . L'intervalle ou segment  $(a, b)$  de l'axe  $Ox$  a pour mesure la somme des  $dx$  le composant. L'intégrale considérée est de même une somme de ces  $dx$  après que chacun a été multiplié par  $f(x)$ . Or remplaçons le banal segment  $(a, b)$  par un ensemble différent du continu, mais ayant cependant, comme lui, une mesure ; on doit évidemment pressentir qu'il y a une généralisation de l'intégrale à découvrir dans un tel ordre d'idées. Ce n'est peut-être ni très clair, ni très précis, mais, en ce point comme en beaucoup d'autres, je devrais réussir au moins à éveiller une intense curiosité envers un ouvrage qui a largement fait ses preuves et qui se trouve maintenant augmenté d'une manière particulièrement heureuse.

A. BUHL (Toulouse).

LOUIS DE CONTENSON. — **La certitude mathématique.** *Les fondements mathématiques dans l'hypothèse de la philosophie critique.* (Système cartésio-kantien). — 1 vol. gr. in-8° de 93 p. ; 3 fr. 25 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce travail reproduit une grande partie d'un article du même auteur, intitulé : *L'Innéisme kantien des fondements mathématiques* et publié dans la *Revue de Philosophie* au début de 1914.

C'est une critique de bien des conceptions kantiennes et j'avoue qu'à la lecture des premières pages je me suis demandé avec inquiétude si M. de Contenson n'allait pas se briser les dents sur une lime particulièrement dure. Eh bien, non ! Il y a là un travail des plus consciencieux et des plus profonds qui oppose les mathématiciens philosophes comme Descartes et