Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1915)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: D. M. Y. Sommerville. — The Elements of Non-Euclidean Geometry. — 1 vol. in-8° ; XVI-274 p. ; 5 sh. ;G. Bell and Sons, London.

Autor: Masson, R.

M. le profeseur Smith a réunie au Teachers College à l'Université Columbia à New-York. H. FEHR.

D. M. Y. SOMMERVILLE. — **The Elements of Non-Euclidean Geometry.** — 1 vol. in-8°; XVI-274 p.; 5 sh.; G. Bell and Sons, London.

Ce volume est une reproduction développée et complétée des conférences faites par M. Sommerville en août 1913 à l'occasion du « Colloquium » organisé par la Société mathématique d'Edimbourg.

Les neuf chapitres qui le composent forment un tout destiné à introduire la notion de géométries non euclidiennes. Les premières indications sur la nature de ces géométries sont fournies par la voie historique.

Après avoir indiqué brièvement quelques axiomes et postulats qui servent de base, M. Sommerville considère plus spécialement le postulat des parallèles, dit postulat d'Euclide; il étudie l'attitude des divers géomètres à son égard. Il montre l'évolution dans les démonstrations; très affirmatives au début elles commencent avec Sacchieri (1677-1733), puis 50 ans plus tard avec Lambert, à dénoter une certaine hésitation, des restrictions plus ou moins implicites. Avec Gauss (1777-1855) l'orientation vers les premières notions de géométrie non-euclidienne tend à s'affirmer. Cependant Gauss n'avait pas encore donné une forme explicite à ses recherches, lorsque simultanément Bolyai en Hongrie, et Lobatchewsky en Russie, arrivèrent à des résultats sensiblement analogues, mais plus précis. Quoique tous deux en correspondance directe ou indirecte avec Gauss, ils y furent conduits par des voies toutes différentes et absolument indépendamment l'un de l'autre. C'est à eux que revient l'honneur d'avoir rompu franchement avec les traditions et formulé les premiers principes de géométrie non-euclidienne. Lobatchewsky et Bolyai s'étaient tous deux limités à la géométrie pour laquelle la somme des 3 angles d'un triangle est *inférieure* à deux droits, l'hypothèse inverse qui avait été soulevée par Sacchieri et Lambert, puis laissée de côté par ceux qui suivirent fut reprise et développée par Riemann.

Cette introduction historique dont nous n'avons mentionné que quelques traits est suivie d'une exposition synthétique, puis analytique des principaux éléments caractéristiques des géométries non-euclidiennes hyperboliques et elliptiques. M. Sommerville conserve le nom de géométrie hyperbolique, donné par M. Klein, à la géométrie de Lobatchewsky et celui de parabolique à celle d'Euclide. Pour la géométrie elliptique correspondant à l'hypothèse d'une ligne droite fermée de longueur finie, il distingue deux cas: 1° Celui où deux droites distinctes peuvent avoir deux points communs, c'est la géométrie antipodaire ou à forme double, plus généralement appelée géométrie sphérique ou de Riemann. Dans cette géométrie deux points déterminent une droite et une seule, *sauf* lorsque ces 2 points sont antipodaires.

2° Celui où deux droites ne se coupent qu'en un point, deux points déterminent alors toujours *une* et *une seule* droite, la géométrie est dite polaire ou à forme unique, c'est à ce dernier cas dont la première étude est due à M. Klein que M. Sommerville réserve le nom de géométrie elliptique à l'exclusion de celle de Riemann.

Au point de vue analytique, l'auteur traite les éléments de géométrie hyperbolique plane, les parallèles, transversales, perpendiculaires en ce qu'elles diffèrent de la géométrie euclidienne. Pour la géométrie dans l'espace, il étudie les points à l'infini, les points idéaux, le principe de dualité, les surfaces qui jouent, relativement à la sphère, le même rôle que les cycles relativement au cercle. Il note également les différences et les similitudes entre les trigonométries hyperboliques et sphériques, le passage analytique des formules de l'une aux formules de l'autre. Il explique pourquoi l'indépendance de la géométrie projective à l'égard de la géométrie euclidienne est si souvent méconnue. La plupart des manuels font en effet une restriction inutile en la faisant précéder et s'appuyer sur la géométrie métrique euclidienne, alors qu'elle est en réalité absolument indépendante de relations métriques quelconques.

Quant à la trigonométrie du plan elliptique, M. Sommerville constate qu'elle est identique à la trigonométrie sphérique et que les formules de trigonométrie sphérique relatives à l'espace elliptique sont les mêmes que celles relatives à l'espace euclidien.

M. Sommerville fait judicieusement précéder son chapitre sur le point de vue philosophique de la question, d'un exposé des diverses représentations concrètes dans l'espace euclidien. Celles-ci sont en effet, pour beaucoup, une préparation presque indispensable pour amener à une conception purement abstraite de la géométrie non-euclidienne. Conception qui doit pouvoir être édifiée uniquement sur une série d'axiomes déterminés, sans l'aide d'aucune représentation dans l'espace euclidien. Le *plan* non-euclidien nécessitant déjà les 3 dimensions de l'espace euclidien, l'expérience ne peut aller au delà et l'imagination ou plutôt le raisonnement peuvent alors seuls suppléer à l'expérience. Cependant au sujet de l'espace à 4 dimensions, M. Sommerville remarque que la notion, d'un espace à plus de 3 dimensions, n'est nécessaire en géométrie non-euclidienne que lorsqu'on veut faire la *représentation* de celle-ci en géométrie euclidienne.

Les derniers chapitres sont une application des principes exposés; l'auteur reprend pour les traiter en géométrie non-euclidienne un certain nombre de problèmes de la géometrie euclidienne parmi les plus aptes à susciter des développements nouveaux tels que la puissance d'un point, l'homothétie, les faisceaux de cercles, les diverses transformations, inversion, involution, etc.

L'étude des coniques termine le volume; prenant, comme en géométrie euclidienne, pour base de la classification la nature des points d'intersection avec la droite à l'infini, M. Sommerville obtient pour la géométrie hyperbolique une assez grande variété de courbes. Le cercle est remplacé par 3 cycles : le cercle, l'équidistante et l'horicycle; l'hyperbole a également 3 formes et il y a, en plus de la parabole proprement dite, 2 paraboles hyperboliques et 1 parabole elliptique.

L'ouvrage de M. Sommerville est une très bonne initiation à un domaine de la géométrie laissé trop souvent en dehors du cadre des études, mais dont la connaissance s'impose de plus en plus à tous ceux qui veulent élargir leur horizon géométrique.

La géométrie euclidienne est constamment présentée au lecteur sous son aspect de cas limite des géométries non-euclidiennes, ce qui permet de saisir mieux la raison d'être et la rigueur logique de bien des principes en apparence arbitraires. R. Masson (Genève).