

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 17 (1915)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES BASES DE L'ANALYSE VECTORIELLE  
**Autor:** Dumont, Emile  
**Kapitel:** III. — Vecteurs-glisseurs.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16314>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

on obtient

$$q = x_1 + iy_1 + jx_2 + jy_2$$

ou

$$q = x_1 + iy_1 + j(x_2 + iy_2)$$

ou enfin

$$q = z_1 + jz_2$$

$z_1$  et  $z_2$  étant deux nombres complexes binaires.

*En résumé* : Un vecteur-quaternion est un quaternion dont l'angle est droit. C'est un vecteur axial et glissant.

Toute l'analyse vectorielle repose sur la confusion entre les vecteurs géométriques et les vecteurs-quaternions homologues ; confusion dont j'ai démontré la légitimité dans mon *Arithmétique générale*.

### III. — Vecteurs-glisseurs.

Les notations  $\overline{AB}$  et  $AB$  sont les notations classiques d'un vecteur géométrique d'origine  $A$  et d'extrémité  $B$ . Hamilton et Grassmann ont employé les notations  $A - B$  et  $B - A$ . Cette dernière, où l'on a voulu voir une abréviation de  $OB - OA$ , semble actuellement réunir les préférences des mathématiciens. On reproche à  $AB$  sa forme qui rappelle celle des produits. Il me paraît que ce reproche est puéril. Lorsque j'écris une formule et que je la transforme par le calcul, je n'agis pas comme une mécanique inconsciente : il ne m'arrivera jamais de prendre  $AB$ , qui au début aurait représenté un vecteur ou sa mesure, pour un produit de  $A$  par  $B$ . Il faut évidemment savoir de quoi l'on parle, et par exemple n'user de la propriété commutative des produits que lorsqu'il ne s'agit pas de facteurs quaternions.

Quoi qu'il en soit, le fait d'avoir vu représenter un vecteur  $\overline{AB}$  par la notation  $B - A$  m'a amené à considérer un vecteur comme un transporteur de points. Cette conception donne naissance à une nouvelle espèce de vecteurs, opérateurs ou nombres, tout à fait distincts des vecteurs-géométriques et

des vecteurs-quaternions, et représentables, à titre de rapports de points, par des symboles tels que

$$\frac{B}{A}.$$

Après réflexions j'ai reconnu que pour pouvoir étendre le champ d'application de ces nouveaux vecteurs, il serait bon d'affecter les points A et B de nombres, ou masses, comme a fait Möbius dans son calcul des barynombres.

*Point-masse.* — Appelons *point-masse* l'association d'un point géométrique A et d'un nombre ou masse  $m$  (nombre positif ou négatif), et désignons provisoirement ce point-masse par la notation  $(A, m)$ .

Multiplier  $(A, m)$  par un nombre  $n$  sera, par définition, considérer le point-masse  $(A, mn)$  :

$$(A, m) \times n = (A, m \cdot n).$$

Désignons par A le point-masse unité  $(A, 1)$ ; on aura

$$(A, m) = (A, 1) \times m = A \cdot m.$$

On écrira  $mA$  au lieu de  $Am$  si  $m$  est entier ou fractionnaire. De là résulte la loi associative :

$$Am \times n = A \times mn.$$

*Définition.* — J'appelle *vecteur-glisseur* toute loi de formation d'un point-masse à l'aide d'un autre.

Si l'on considère par exemple les points-masses  $Am$  et  $Bn$ , portés par un axe  $u$  et tels que  $\overline{AB} = \bar{u} \cdot d$  pour former  $Bn$  à l'aide de  $Am$ , il suffit de multiplier d'abord  $Am$  par le nombre  $h = \frac{n}{m}$  ce qui donne  $An$ ; puis on fait glisser  $An$  de A en B, lui faisant ainsi parcourir le vecteur-géométrique  $\overline{AB} = \bar{u} \cdot d = \bar{a}$ . Ce vecteur-géométrique  $\bar{u}d$  a pour homologue un vecteur-quaternion  $ud$  qu'on peut lui substituer dans les raisonnements et les calculs, ainsi qu'il a été dit à propos des vecteurs-quaternions.

Désignons le vecteur-glisseur ainsi défini par la notation

$$G(h, \alpha)$$

et soit  $g(\alpha)$  le nombre chargé uniquement du glissement ; appelons-le *glisseur*. Donnons à  $Bn$  le nom de *produit* de  $Am$  par le vecteur-glisseur  $G(h, \alpha)$ .

Nous aurons

$$Bn = Am \times G(h, \alpha) = [(Am)h] g(\alpha) .$$

De cette relation résulte, en vertu de ma définition générale du produit de deux nombres :

$$G(h, \alpha) = h . g(\alpha) .$$

Je démontre que le glisseur  $g(\alpha)$  analogue au verseur d'un quaternion, est une fonction exponentielle de  $\alpha$ , et que l'on a aussi

$$g(\alpha) = 1 + \omega . \alpha$$

$\omega$  étant une constante dont le carré est 0. Ceci entraîne

$$g(\alpha) = e^{\omega \alpha}$$

et

$$G(h, \alpha) = h e^{\omega . \alpha} = h e^{\omega . ud} .$$

On marquera peut-être quelque étonnement au sujet de la constante  $\omega$ , dont le carré et les puissances supérieures sont nuls. En appliquant la théorie des glisseurs aux vecteurs géométriques glissants, dont les axes sont parallèles, on arrive à constater que  $\omega$  est un nombre, loi de formation à l'aide d'un vecteur libre, d'un couple de vecteurs glissants, dont ce vecteur libre est le *moment*.

Autrement dit,  $\bar{\alpha}$  étant un vecteur géométrique libre, on a

$$\bar{\alpha} . \omega = \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 .$$

$\bar{\beta}_1$  et  $\bar{\beta}_2$  étant les deux éléments d'un couple dont  $\bar{\alpha}$  est le moment.

Si nous multiplions  $\bar{\alpha} . \omega$  par  $\omega$  nous obtenons

$$\bar{\alpha} . \omega^2 = \bar{\beta}_1 . \omega + \bar{\beta}_2 . \omega .$$

$\bar{\beta}_1 . \omega$  et  $\bar{\beta}_2 . \omega$  sont deux couples ayant pour moments respectifs les vecteurs  $\bar{\beta}_1$  et  $\bar{\beta}_2$  dont la résultante est nulle. Il en

résulte

$$\bar{\beta}_1 \cdot \omega + \bar{\beta}_2 \cdot \omega = 0$$

ou

$$\bar{\alpha} \cdot \omega^2 = 0 .$$

Et par suite

$$\omega^2 = 0 .$$

*Remarque.* — Le moment d'un couple de vecteurs glissants polaires est un vecteur libre axial.

#### IV. — Conclusion.

Telles sont les définitions des trois espèces de vecteurs que j'ai signalées au début de cet article. Je les ai exposées avec quelques détails, afin d'être aussi clair que possible, et afin de mettre bien en évidence les différences fondamentales qui les distinguent. Il importe en effet de réagir contre les coupables confusions où semblent se complaire les fervents de l'analyse vectorielle. En obscurcissant à plaisir semble-t-il les principes fondamentaux de cette belle science, les géomètres modernes l'ont enveloppée d'une ombre mystérieuse où le débutant manque de trébucher à chaque pas.

Comment comprendre en effet qu'il y ait deux produits différents de vecteurs géométriques ? un produit scalaire et un produit vectoriel, le premier étant un nombre et le second un vecteur. Et l'homogénéité, qu'en fait-on ?

En réalité, il n'y a pas de produit de deux vecteurs géométriques ; cette locution n'a aucun sens <sup>1</sup>.

1° On peut multiplier un vecteur géométrique par un vecteur-quaternion dont l'axe lui est perpendiculaire, ou par un vecteur-glisseur dont l'axe lui est également perpendiculaire.

2° Le produit de deux vecteurs-quaternions, d'un vecteur-quaternion par un vecteur-glisseur, d'un vecteur-glisseur par un vecteur-quaternion, et de deux vecteurs-glisseurs sont des nombres, répondant à la définition générale et uni-

<sup>1</sup> Je sais bien qu'on lui en donne un par définition, mais c'est la raison d'être de cette définition que je ne puis accepter.