LES NOMBRES PREMIERS DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN SES FACTEURS PREMIERS

Autor(en): **Hanses, H. E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16315

un transporteur; il n'a donc pas droit au titre de *vecteur*. On devrait l'appeler par exemple *recteur;* seuls le quaternion et le glisseur sont des *vecteurs*. Mais comme le mot quaternion ne se justifie que par une décomposition en quatre termes

$$s + ix + jy + kz$$

qui n'a rien de fondamental dans la théorie, on pourrait appeler le quaternion-droit un *verseur-droit;* le quaternion, un *verseur ;* le vecteur-glisseur, un *glisseur*.

Il n'y aurait ainsi plus la moindre équivoque possible.

Quant au biquaternion, ce serait un *verseur-glisseur* ou bien un *glisseur-verseur;* on pourrait aussi l'appeler un *visseur*.

LES NOMBRES PREMIERS
DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN SES FACTEURS PREMIERS

PAR

H. E. Hansen (Copenhague).

I. — Les nombres premiers. — Méthode de formation.

Tout nombre de la suite des nombres entiers peut être représenté par une des formules

$$6n\ ,\quad 6n \pm 1\ ,\quad 6n \pm 2 \qquad \text{et} \qquad 6n + 3$$

quand on donne à n une valeur entière convenable.

On voit par là que tous les nombres qui ne sont pas divisibles par 2 ou par 3 seront représentés par les formules $6n + 1$ et $6n - 1$ seulement, et ainsi ces deux formules représenteront tous les nombres premiers impairs et tous les nombres composés impairs non divisibles par 3.

Si les deux formules représentent des nombres composés, il faut que la première d'entre elles puisse se former par multiplication des deux facteurs $6x+1$ et $6x_1+1$ ou $6x-1$ et $6x_1-1$; de même la dernière des formules susdites pourra être produite par les facteurs $6x-1$ et $6x_1+1$.

Il en résulte

$$6n+1=\begin{cases} 6[6xx_1+(x+x_1)]+1 & \text{(I)} \\ 6[6xx_1-(x+x_1)]+1 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$6n-1= 6[6xx_1+(x-x_1)]-1\ . \qquad \text{(III)}$$

Supposons que $6n+1$ soit un nombre composé; il faut que l'un des deux crochets (I) ou (II) où x et x_1 sont des nombres entiers, soit égal au nombre n dans la suite des nombres, et d'un autre côté que chaque nombre n de celle-ci, qui se laissera décomposer d'après l'une de ces formules, produise un nombre composé de la forme $6n+1$. Si, cependant, le même nombre n ne se trouve pas décomposable d'après (III), alors le nombre $6n-1$ sera un nombre premier.

Si l'on a un nombre n décomposable d'après (III), mais non d'après (I) ou (II), on aura $6n-1$ comme nombre composé, tandis que $6n+1$ sera un nombre premier.

Enfin, pour un nombre n qui ne se laisse décomposer ni d'après (I) ou (II), ni d'après (III), $6n+1$ et $6n-1$ seront tous deux des nombres premiers.

Nous pourrons, par exemple, déterminer les nombres n dans l'intervalle 1 — 100, qui sont décomposables d'après (I), en cherchant les valeurs de $6xx_1+(x+x_1)$ pour les différentes valeurs de x et x_1.

Ainsi pour $x_1=\mathbf{1}$, $x=1, 2, 3, \ldots$ l'expression $6xx_1+(x+x_1)$ prend les valeurs 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99,

$x_1=\mathbf{2}$, $x=2, 3, 4, \ldots$ donne 28, 41, 54, 67, 80, 93,

$x_1=\mathbf{3}$, $x=3, 4, 5$, donne 60, 79, 98.

De la même manière on formera d'après (II) les valeurs de $6xx_1-(x+x_1)$.

$x_1=\mathbf{1}$, $x=1, 2, 3, \ldots$ donne 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59, 64, 69, 74, 79, 84, 89, 94, 99,

$x_1=\mathbf{2}$, $x=2, 3, 4, \ldots$ donne 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97,

$x_1 = \mathbf{3}$, $x = 3, 4, 5, 6$, donne 48, 65, 82, 99,
$x_1 = \mathbf{4}$, $x = 4$, donne 88.

A l'aide de (III) on procédera de même pour $6xx_1 + (x - x_1)$.

$x_1 = \mathbf{1}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ donne les valeurs 6, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55, 62, 69, 76, 83, 90, 97,
$x_1 = \mathbf{2}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ donne 11, 24, 37, 50, 63, 76, 89,
$x_1 = \mathbf{3}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ donne 16, 35, 54, 73, 92,
$x_1 = \mathbf{4}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ donne 21, 46, 71, 96,
$x_1 = \mathbf{5}$, $x = 1, 2, 3$, donne 26, 57, 88,
$x_1 = \mathbf{6}$ donne 31, 68, pour $x = 1$ et 2,
$x_1 = \mathbf{7}$ donne 36, 79; $x_1 = \mathbf{8}$ donne 41, 90;
enfin, pour $x = 1$, x_1 prenant les valeurs entières de **9** à **19**, on aura

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
46	51	56	61	66	71	76	81	86	91	96 .

Si maintenant, après avoir écrit la série des nombres 1 à 99 sur le papier, on met une parenthèse ( ) autour de chaque nombre décomposable d'après (I) ou (II), et un crochet [ ] autour de ceux qui sont décomposables d'après (III), d'où suit qu'un nombre décomposable d'après (I) ou (II) aussi bien que d'après (III) aura les deux marques, alors chaque nombre restant dans la série sans aucune marque nous donnera 2 nombres premiers : $6n + 1$ et $6n - 1$. Les nombres portant les deux marques ne donneront aucun nombre premier, tandis que les nombres portant seulement une des marques nous donneront des nombres premiers d'une forme correspondant à la marque opposée.

Ainsi on aura formé tous les nombres premiers entre 5 et 600 en employant seulement les nombres de 1 à 100, et il est bien clair que la méthode pourra être appliquée sans limites.

II. — Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers.

Pour décomposer un nombre a en ses facteurs premiers on n'a pas eu jusqu'ici d'autre moyen que de diviser le nombre successivement par les nombres premiers $2, 3, 5 \ldots p$, où p signifie le nombre premier inférieur à $\sqrt{a}$ et le plus près. Lorsque la division donne un reste nul, le diviseur employé est un facteur premier pour a.

La méthode de la formation des nombres premiers que nous avons donnée auparavant nous fournit un nouveau moyen d'entreprendre cette décomposition. Nous présenterons le procédé à l'aide d'un exemple en décomposant le nombre 5251.

Premièrement on a $5251 = 6 . 875 + 1$, et l'on sait que si le nombre est un nombre composé, il faut que 875 se laisse décomposer d'après une des formules

$$6xx_1 + (x + x_1) \qquad \text{(I)}$$

$$6xx_1 - (x + x_1) \, . \qquad \text{(II)}$$

L'expression (I) nous donne $6xx_1 = 875 - (x + x_1)$ en montrant que le second membre de cette équation doit être divisible par 6, puisque x et x_1 sont des nombres entiers. Comme 875 divisé par 6 donne le reste 5, il faut que $x + x_1$ soit de la forme $6y + 5$, et on aura ainsi

$$xx_1 = 145 - y \qquad (1)$$

$$x + x_1 = 6y + 5 \qquad (2)$$

et, par suite de l'identité $(x - x_1)^2 = (x + x_1)^2 - 4xx_1$, on aura

$$(x - x_1)^2 = (6y + 5)^2 - 4(145 - y) \, ,$$

ou

$$x - x_1 = \sqrt{(6y + 5)^2 - 4(145 - y)} \, ; \qquad (3)$$

la racine sera rationnelle, et positive pour $x > x_1$.

La relation (2) montre que $x + x_1$ pour toutes les valeurs de y sera impair et, par conséquent, l'un des deux nombres sera pair, l'autre impair. Dès lors il faut que le produit xx_1 soit pair et par conséquent y *impair*.

Une somme s pourra être décomposée en deux nombres dont le produit p aura les valeurs croissantes suivantes

$$1(s - 1) \, , \quad 2(s - 2) \, , \quad 3(s - 3) \, , \, \ldots \, \frac{s}{2} \frac{s}{2} \, .$$

La dernière de ces valeurs suppose s pair et correspond à un maximum de p, de même que la valeur à l'extrême gauche correspond à un minimum de p.

Il s'ensuit qu'on aura $s - 1 \overline{\overline{<}} p \overline{\overline{<}} \frac{s^2}{4}$; la première inégalité, appliquée à notre exemple, donne

$$6y + 4 \overline{\overline{<}} 145 - y$$

ou $y \overline{\overline{<}} 20$, puisque y doit être entier.

L'autre inégalité répond dans l'exemple à une valeur *réelle* pour (3) et donne

$$36y^2 + 64y - 555 \overline{\overline{<}} 0 ,$$

d'où l'on déduit (avec 2 décimales) $y \overline{\overline{>}} 3{,}14$ ou $y \overline{\overline{>}} 4$, puisque la valeur sera entière.

D'après ce qui précède, y pourra avoir les valeurs 5, 7, 9, ... 19.

A cela correspond, d'après (3)

$$\begin{array}{llll}
y = 5 , & x - x_1 = \sqrt{35^2 - 4 \cdot 140} = \sqrt{35}\sqrt{35 - 4 \cdot 4} , & & \\
y = 7 , & \quad » \quad = \sqrt{47^2 - 4 \cdot 138} , & 138 = 2 \cdot 3 \cdot 23 , & \\
y = 9 , & \quad » \quad = \sqrt{59^2 - 4 \cdot 136} , & 136 = 2^3 \cdot 17 , & \\
y = 11 , & \quad » \quad = \sqrt{71^2 - 4 \cdot 134} , & 134 = 2 \cdot 67 , & \\
y = 13 , & \quad » \quad = \sqrt{83^2 - 4 \cdot 132} , & 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 , & \\
y = 15 , & \quad » \quad = \sqrt{95^2 - 4 \cdot 130} = \sqrt{5}\sqrt{5 \cdot 19^2 - 4 \cdot 26} , & & \\
y = 17 , & \quad » \quad = \sqrt{107^2 - 4 \cdot 128} , & 128 = 2^7 , & \\
y = 19 , & \quad » \quad = \sqrt{119^2 - 4 \cdot 126} = \sqrt{7}\sqrt{7 \cdot 17^2 - 4 \cdot 18} , & &
\end{array}$$

et l'on voit[1] que $x - x_1$ sera irrationnel pour chaque valeur de y et 875 par conséquent non-décomposable d'après (I).

---

[1] Dans les cas où le facteur de 4 et le premier nombre sous le signe radical sont premiers entre eux, il ne faut pas faire les calculs indiqués de la manière ordinaire pour savoir si la racine est *irrationnelle*. Cela sera le cas si aucun des deux facteurs différents qu'on peut former des facteurs premiers dans le facteur de 4 n'a une somme égale au radical du premier nombre sous le signe radical.

Ainsi nous aurons pour $y = 13$ les paires de facteurs

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2^2 & 11 \\ 132 , & 2^2 \cdot 11 , & 3 \cdot 11 , & 2^2 \cdot 3 , \end{array}$$

mais aucun de ceux-ci n'a la somme 83.

La démonstration de cela appartient cependant ailleurs.

Il nous reste à examiner si 875 est décomposable d'après (II). Nous aurons

$$6xx_1 = 875 + (x + x_1) .$$

Comme ci-dessus il faut avoir

$$x + x_1 = 6y - 5$$
$$xx_1 = 145 + y$$
$$x - x_1 = \sqrt{(6y - 5)^2 - 4(145 + y)} .$$

De même on trouve, comme plus haut, que y sera *impair* et $5 \overline{\overline{<}} y \overline{\overline{<}} 30$. Il faut ainsi que dans l'expression de $x - x_1$ on mette les valeurs $y = 5, 7, 9 \dots$ jusqu'à ce qu'on ait une valeur rationnelle pour la racine.

Il en est déjà ainsi pour $y = 5$, à savoir

$$x - x_1 = \sqrt{25^2 - 4 . 150} = 5\sqrt{5^2 - 4 . 2 . 3}\ [1].$$

On a à présent $x - x_1 = 5$, $x + x_1 = 25$, ainsi $x = 15$, $x_1 = 10$ et par conséquent on peut écrire le nombre 5251

$$6[6 . 15 . 10 - (15 + 10)] + 1 = (6 . 15 - 1)(6 . 10 - 1) = 89 . 59 ,$$

ou, en d'autres termes, on a décomposé 5251 en ses facteurs premiers 59 et 89.

Remarque. — Il va sans dire que nous n'avons pas la prétention de donner ici une règle générale pour la décomposition des nombres entiers. On voit par l'exemple que nous avons développé que la méthode n'est pas universelle. S'il s'agissait d'appliquer le même procédé au nombre 77073877, on ne tarderait pas à rencontrer des obstacles insurmontables. Le nombre peut s'écrire 6 . 12845646 + 1 ; on voit que 12845646 sera décomposable ou d'après *une* des deux premières des formules susdites (le nombre donné, dans ce cas, est un nombre composé dont les facteurs seront déterminés par la décomposition) ou bien le nombre ne sera pas décomposable d'après *ces deux* formules et le nombre donné est un

[1] Les paires de facteurs, nommés plus haut, sont ici 1, 6 et 2, 3, dont la dernière paire a la somme 5. La racine sera donc *rationnelle* et égale à 1, savoir 3 — 2.

nombre premier. En procédant comme dans l'exemple mentionné, nous trouverons ici :

$$x + x_1 = 6y \ , \quad xx_1 = 2140941 - y \ , \quad x - x_1 = 2\sqrt{(3y)^2 - (2140941 - y)}$$

ainsi que les deux limites :

$$y \gtreqless 487 \qquad \text{et} \qquad y \lesseqgtr 305849 \ .$$

On voit que les x et x_1 tous deux seront pairs ou tous deux impairs, mais on ne voit pas s'ils sont premiers entre eux ou non, et non plus (ainsi que dans l'exemple nommé) si la quantité y sera paire ou impaire. Dans l'expression de $x - x_1$ il faudrait donc remplacer y par tous les nombres entiers entre les deux limites. Il est clair que cela exige plus de travail que ne représentent les divisions du nombre donné par les 1094 nombres premiers qui sont plus petits que la racine 8779, du nombre proposé.

Copenhague, janvier 1914.

SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES [1]

PAR

G. FONTENÉ (Paris)

Si l'on devait se borner, dans un rapport annuel, à ce qui peut être nouveau, on risquerait de paraître trop bref. Il faut donc se résigner à répéter des choses déjà dites ; et, si l'on veut essayer d'être utile, on doit, tout en continuant à louer ce qui est bien, insister sur les points qui laissent encore à désirer.

Or, il n'est pas douteux que l'esprit géométrique est en baisse ; et c'est grand dommage. Dans l'éloge académique qu'il a consacré à Joseph Bertrand, M. Darboux s'exprime ainsi : « Bertrand a tou-

---

[1] Rapport présenté au Conseil Académique de Paris, en juin 1914, par M. G. Fontené, inspecteur d'Académie.

Tous ceux qui ont suivi, de près ou de loin, les travaux de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique (Paris, 1-4 avril 1914) liront avec intérêt ce rapport, rédigé au lendemain du Congrès, et dans lequel l'auteur revient à plusieurs reprises sur les séances du Congrès. Nous remercions M. G. Fontené d'avoir bien voulu nous autoriser à reproduire son rapport. — *La Réd.*