IV. — Application des formules du groupe (3).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

IV. — Application des formules du groupe (3).

1. Soit ABC un triangle quelconque. Construisons le triangle A′B′C′ ayant pour sommets les pieds des hauteurs (fig. 8). Les relations (3) permettent :

1° d'établir le théorème ci-dessous ;

2° d'exprimer les côtés du triangle A′B′C′ en fonction de ceux du triangle ABC.

1° Partons de la seconde des relations (3) :

$$h'h'' = ab - a''b' .$$

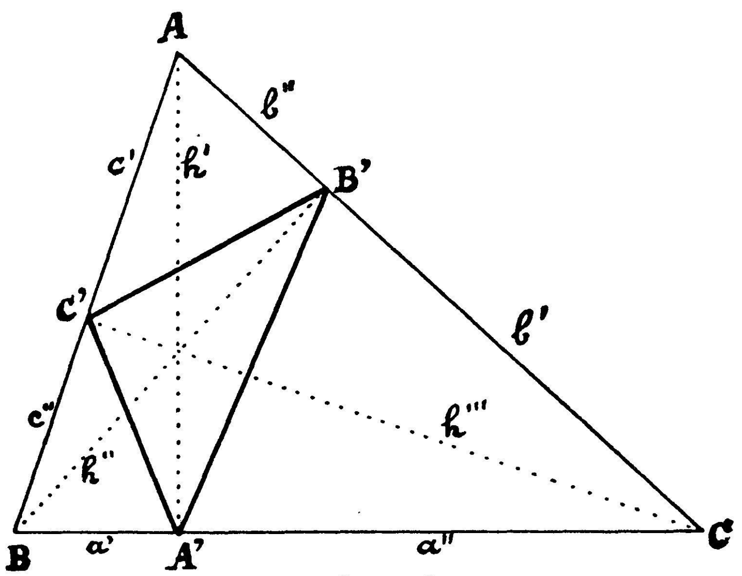

Fig 8.

La figure ABA′B′ est un quadrilatère inscriptible ; d'après le premier *théorème de Ptolémée,* le produit de ses diagonales est égal à la somme des produits de ses côtés opposés :

$$h'h'' = (\mathrm{A'B'}) \,.\, c + a'b'' .$$

Par suite

$$(\mathrm{A'B'}) \,.\, c + a'b'' = ab - a''b' ,$$

d'où

$$\mathrm{A'B'} = \frac{ab - a'b'' - a''b'}{c} .$$

Mais

$$ab = (a' + a'')(b' + b'') = a'b' + a''b'' + a'b'' + a''b'$$

Remplaçons :

De même... (13) et...
$$
\left\{
\begin{aligned}
A'B' &= \frac{a'b' + a''b''}{c} ,\\
B'C' &= \frac{b'c' + b''c''}{a} ,\\
C'A' &= \frac{c'a' + c''a''}{b} ,
\end{aligned}
\right.
$$

d'où

$$
(13)' \quad
\left\{
\begin{aligned}
c \,.\, A'B' &= a'b' + a''b'' ,\\
a \,.\, B'C' &= b'c' + b''c'' ,\\
b \,.\, C'A' &= c'a' + c''a'' .
\end{aligned}
\right.
$$

Nous obtenons donc le théorème suivant (relations 13') :

THÉORÈME V. — *Le rectangle construit sur un côté d'un triangle quelconque et la distance des pieds des hauteurs abaissées sur les deux autres côtés est équivalent à la somme des rectangles construits sur les segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés correspondants.*

2° Exprimons maintenant les côtés du triangle A'B'C' des pieds des hauteurs en fonction de ceux du triangle ABC (fig. 8). Nous avions (formule 13) :

$$A'B' = \frac{a'b' + a''b''}{c} .$$

Or

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb'' ,$$

et

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

d'où

$$a'' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \quad \text{et} \quad b'' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} .$$

En outre :

$$a' = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \quad \text{et} \quad b' = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b} ,$$

car

$$a' = a - a'' \quad \text{et} \quad b' = b - b'' .$$

Portons ces valeurs dans l'expression de A'B' :

$$A'B' = \frac{\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \cdot \dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{2b} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \cdot \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}}{c}$$

ou

$$A'B' = \frac{[a^2 + (b^2 - c^2)] \,.\, [a^2 - (b^2 - c^2)] + [b^2 + (c^2 - a^2)] \,.\, [b^2 - (c^2 - a^2)]}{4abc} ,$$

ou, en effectuant les calculs et en simplifiant :

Par permutation... et... (14)
$$\left\{\begin{aligned} A'B' &= \frac{c\,.\,(a^2+b^2-c^2)}{2ab} \,, \\ B'C' &= \frac{a\,.\,(b^2+c^2-a^2)}{2bc} \,, \\ C'A' &= \frac{b\,.\,(c^2+a^2-b^2)}{2ca} \,, \end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules exprimant les côtés du triangle des pieds des hauteurs en fonction des côtés du triangle donné.

2. Partons de la première des formules du groupe (3) :

$$h'h''' = ac - a'c'' \,.$$

D'autre part (fig. 1) :

$$\frac{h'}{h'''} = \frac{a'}{c''} \,.$$

Multiplions membre à membre :

$$h'^2 = \frac{aa'c}{c''} - a'^2 \,.$$

Or : *Deux sommets d'un triangle quelconque et les pieds des hauteurs qui en partent sont sur une circonférence ayant pour diamètre la distance de ces deux sommets :*

A, B, D, E	sont sur une circonférence de diamètre				AB ;
B, C, E, F	»	»	»	»	BC ;
C, A, F, D	»	»	»	»	CA .

Par suite, d'après le théorème des sécantes :

$$aa'' = bb' \;; \qquad bb'' = cc' \;; \qquad cc'' = aa' \,.$$

Remplaçons aa' par cc'' dans h'^2 :

$$h'^2 = c^2 - a'^2 \,,$$

ou

$$c^2 = a'^2 + h'^2 \ldots \qquad \textit{théorème de Pythagore.}$$

Reprenons l'expression de h'^2 (fig. 1) :

$$h'^2 = \frac{aa'(c'+c'')}{c''} - a'^2 \,,$$

ou

$$h'^2 = a'(a - a') + \frac{aa'c'}{c''} .$$

Mais

$$aa' = cc'' .$$

Donc

$$h'^2 = a'a'' + cc'$$

ou aussi,

$$h'^2 = a'a'' + bb'' \qquad (15)$$

puisque $cc' = bb''$.

Les relations (15) donnent lieu au théorème suivant :

Théorème VI. — *Le carré construit sur une hauteur d'un triangle quelconque est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant plus le rectangle ayant pour dimensions l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui.*

Cas particulier. — $A = 90°$; $b'' = c' = 0$.

La relation (15) devient :

$$h'^2 = a'a'' ,$$

c'est-à-dire : *La hauteur d'un triangle rectangle est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*

Le théorème VI peut être envisagé comme étant la généralisation de la propriété ci-dessus.

La seconde des égalités (15) peut s'écrire (fig. 1) :

$$h'^2 = a'a'' + b'b'' + b''^2 .$$

Par permutation...

$$h''^2 = b'b'' + c'c'' + c''^2 .$$

et...

$$h'''^2 = c'c'' + a'a'' + a''^2 .$$

D'où résulte :

$$(\mathrm{I})' \qquad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

En partant de l'autre égalité

$$h'^2 = a'a'' + cc' ,$$

on trouve, après les mêmes transformations :

$$(\mathrm{I})'' \qquad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

De (I)′ et (I)″ résulte :

$$(16) \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2$$

c'est-à-dire :

Théorème VII. — *Les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs déterminés sur les côtés d'un triangle quelconque par les hauteurs correspondantes sont égales.*

La relation (16) a été établie sans l'intermédiaire du théorème de Pythagore.

Conséquence géométrique. — De (16) :

$$b'^2 - b''^2 = (a''^2 - a'^2) + (c''^2 - c'^2)$$

ou

$$(b' + b'')(b' - b'') = (a'' + a')(a'' - a') + (c'' + c')(c'' - c') ,$$

ou (fig. 9) :

$$b \,.\, \mathrm{CL} = a \,.\, \mathrm{CK} + c \,.\, \mathrm{BM}$$

ou enfin

$$\overline{\mathrm{CS}}^2 = \overline{\mathrm{CR}}^2 + \overline{\mathrm{BT}}^2 .$$

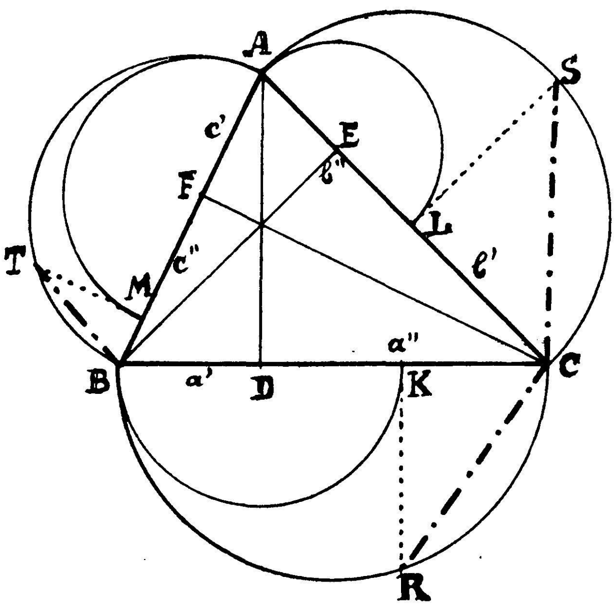

Fig 9.

Par suite, les segments CS, CR et BT sont les côtés d'un triangle rectangle ; d'où le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si avec les pieds des hauteurs d'un triangle comme centres et les petits segments qu'elles déterminent sur les côtés correspondants comme rayons on décrit des circonférences et qu'aux points où elles coupent les grands segments on élève des perpendiculaires aux côtés jusqu'à leurs points d'intersection avec les circonférences décrites sur ces côtés comme diamètres, les distances de ces points aux extrémités des grands segments sont les côtés d'un triangle rectangle.*

Remarque. — De (I)′ ou (I)″ on peut déduire le théorème de Pythagore en supposant $\mathrm{A} = 90°$.