

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1915)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES
Kapitel: II
Autor: Gonggryp, B.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16319>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

II

Tâchons de démontrer qu'à l'équation :

$$F(x) \equiv x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \dots + A_{2n-1} x + A_{2n} = 0$$

peut satisfaire une valeur de x comme : $x = u + i\nu$.

On sait que :

$$F(u + i\nu) = F(u) + i\nu F^{\text{I}}(u) - \frac{\nu^2}{1 \cdot 2} F^{\text{II}}(u) - i \frac{\nu^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F^{\text{III}}(u) \dots \\ + \frac{(i\nu)^{2n}}{1 \dots 2n} F^{[2n]}(u).$$

Cette équation $F(u + i\nu) = 0$ pourra se vérifier, si simultanément :

$$F(u) - \frac{\nu^2}{1 \cdot 2} F^{\text{II}}(u) + \frac{\nu^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} F^{\text{IV}}(u) - \frac{\nu^6}{1 \dots 6} F^{\text{VI}}(u) \dots \\ \pm \frac{\nu^{2n}}{1 \dots 2n} F^{[2n]}(u) = 0 \quad (4)$$

et

$$F^{\text{I}}(u) - \frac{\nu^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} F^{\text{III}}(u) + \frac{\nu^4}{1 \dots 5} F^{\text{V}}(u) - \frac{\nu^6}{1 \dots 7} F^{\text{VII}}(u) \dots \\ \mp \frac{\nu^{2n-2}}{1 \dots (2n-1)} F^{[2n-1]}(u) = 0. \quad (5)$$

Les premiers membres de ces deux équations sont des fonctions de ν^2 ; s'il y a une valeur $\nu = \nu_1$, satisfaisant aux conditions exposées ci-dessus, il y aura de même une valeur $\nu = -\nu_1$; d'où il s'ensuit qu'une équation du $2n^{\text{ième}}$ degré ayant une racine $x = u + i\nu$, en possède aussi une autre : $x = u - i\nu$.

En posant : $\nu^2 = \nu'$, (4) et (5) deviennent :

$$U_0 \nu'^n + U_2 \nu'^{n-1} + U_4 \nu'^{n-2} + \dots + U_{2n-2} \nu' + U_{2n} = 0 \quad (4a)$$

et

$$U_1 \nu'^{n-1} + U_3 \nu'^{n-2} + U_5 \nu'^{n-3} + \dots + U_{2n-3} \nu' + U_{2n-1} = 0. \quad (5a)$$

(On voit que U_h est une fonction du $h^{\text{ième}}$ degré par rapport

à u .) De l'élimination de ρ' entre (4_a) et (5_a) il résulte une équation en u représentée par le déterminant qui se trouve ci-dessous. Quant au degré de cette équation-ci, c'est celui d'un terme quelconque, par exemple, celui de la diagonale : $U_1^n U_{2n}^{n-1}$; c'est-à-dire :

$$n + 2n(n - 1) = n(2n - 1) .$$

Donc, encore une fois, si le degré de l'équation proposée ne contient qu'un seul facteur 2, celui de l'équation finale sera *impair*, d'où suit une valeur *réelle* de u ; ensuite (4_a) et (5_a) donneront une valeur réelle de ρ' , c'est-à-dire de ρ^2 ; la réalité de ρ dépendra encore du signe de cette valeur de ρ^2 , mais n'a rien à faire avec la conclusion qu'il est permis de tirer de ces faits : qu'il y a actuellement des valeurs de u et de ρ , de sorte que $u + i\rho$ représente une racine de $F(x) = 0$.

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_3 & \dots & \dots & U_{2n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_1 & U_3 & \dots & \dots & U_{2n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & U_1 & U_3 & \dots & \dots & U_{2n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & U_{2n-1} \\ U_0 & U_2 & U_4 & \dots & \dots & U_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_0 & U_2 & \dots & \dots & \dots & U_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & U_0 & U_2 & \dots & \dots & \dots & U_{2n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & U_{2n} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ensuite, si dans le nombre $2n$ il existe plus d'un facteur 2, on peut appliquer le même procédé à l'équation résultante en u , en posant :

$$u = u_1 + iw_1 .$$

L'équation résultante en u aura alors dans son degré *deux facteurs 2 de moins* que l'équation proposée. Posant pour aller plus loin $u_1 = u_2 + iw_2$, etc., on obtiendra enfin une résultante par exemple en u_p , dont le degré est un nombre *impair*, laquelle aura donc une racine réelle.

Alors nous aurons posé successivement :

$$x = u + iv ,$$

$$u = u_1 + iv_1 ,$$

$$u_1 = u_2 + iv_2 ,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_{p-1} = u_p + iv_p ;$$

d'où

$$x = u_p + i(v + v_1 + \dots + v_p) = u_p + iV ,$$

en sachant qu'il existe actuellement une valeur réelle de u_p . Or, dans ce cas, nous avons vu ci-dessus qu'il y a aussi une valeur réelle pour V^2 et par conséquent une valeur ou réelle ou imaginaire de V , satisfaisant aux conditions nécessaires ; en d'autres termes :

Une équation du $2n^{\text{ième}}$ degré possède en tout cas une racine, soit réelle, soit complexe.

Vérification et application des résultats obtenus.

Prenons pour exemple l'équation du quatrième degré :

$$x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0 .$$

1° Nous pouvons supposer que le premier membre est égal au produit :

$$(x^2 - px - q)(x^2 + a_1x + a_2) .$$

D'après les formules du système (A) on obtiendra :

$$(2p + A_1)q + p^3 + A_1p^2 + A_2p + A_3 = 0$$

et

$$q^2 + (3p^2 + 2A_1p + A_2)q + p^4 + A_1p^3 + A_2p^2 + A_3p + A_4 = 0 .$$

L'élimination de q conduit à l'équation du sixième degré :

$$(2p + A_1)^2(p^4 + A_1p^3 + A_2p^2 + A_3p + A_4) + (p^3 + A_1p^2 + A_2p + A_3)^2 - (p^3 + A_1p^2 + A_2p + A_3)(3p^2 + 2A_1p + A_2)(2p + A_1) = 0 . \quad (6)$$

L'expression $n(2n - 1)$ se vérifie donc, car : $2(4 - 1) = 6$.

Ensuite, en supposant $A_1 = 0$, l'équation (6) se réduit à :

$$p^6 + 2A_2p^4 + (A_2^2 - 4A_4)p^2 - A_3^2 = 0 . \quad (7)$$

c'est-à-dire précisément à l'équation auxiliaire de la méthode de *Descartes*, à quoi il fallait s'attendre.

2° On peut poser :

$$x = u + iv .$$

D'après les formules (4) et (5) les inconnues u et v seront données par :

$$u^4 + A_1 u^3 + A_2 u^2 + A_3 u + A_4 - v^2(6u^2 + 3A_1 u + A_2) + v^4 = 0$$

et

$$4u^3 + 3A_1 u^2 + 2A_2 u + A_3 - v^2(4u + A_1) = 0 .$$

L'élimination de v^2 conduit à l'équation du sixième degré :

$$(4u + A_1)^2 (u^4 + A_1 u^3 + A_2 u^2 + A_3 u + A_4) + (4u^3 + 3A_1 u^2 + 2A_2 u + A_3)^2 - (4u^3 + 3A_1 u^2 + 2A_2 u + A_3) (6u^2 + 3A_1 u + A_2) (4u + A_1) = 0 .$$

Dans le cas où $A_1 = 0$, cette équation devient :

$$u^6 + \frac{A_2}{2} u^4 + \frac{A_2^2 - 4A_4}{16} u^2 - \left(\frac{A_3}{8}\right)^2 = 0 . \quad (8)$$

Celle-ci est précisément l'équation auxiliaire de la méthode de résolution d'*Euler*. Les deux équations, le signe du terme connu étant négatif, auront chacune deux racines égales, l'une affectée du signe $+$, l'autre du signe $-$.

Remarque. Dans la seconde démonstration, on a cherché pour x une valeur $x = u + iv$; or, puisque cette racine est en tout cas accompagnée d'une autre $x = u - iv$, cette recherche revient tout à fait au même que l'investigation d'un facteur quadratique :

$$\{(x - u) - iv\} \{(x - u) + iv\} = x^2 - 2ux + u^2 + v^2 .$$

La comparaison de cette expression avec

$$x^2 - px - q ,$$

employée dans la première démonstration nous fait conclure a priori que l'équation finale en u aura des racines dont chacune est la moitié d'une racine de l'équation à laquelle p doit satisfaire (première démonstration).

Cette conclusion se vérifie complètement par (7) et (8).

*Note sur la formation des équations finales
de la première démonstration.*

Nous nous servons de la notation :

$$F_h(p) = p^h + A_1 p^{h-1} + A_2 p^{h-2} + \dots + A_{h-1} p + A_h \quad (9)$$

donc

$$F_{h+1}(p) = p^{h+1} + A_1 p^h + A_2 p^{h-1} + \dots + A_h p + A_{h+1},$$

d'où

$$F_{h+1}(p) = p F_h(p) + A_{h+1}. \quad (10)$$

De (10) on peut déduire :

$$F'_{h+1}(p) = p F'_h(p) + F_h(p); \quad (11)$$

de même

$$F'_h(p) = p F'_{h-1}(p) + F_{h-1}(p). \quad (12)$$

En poursuivant de (12) nous tirons :

$$F''_h(p) = p F''_{h-1}(p) + 2 F'_{h-1}(p); \quad (13)$$

en général :

$$F_h^{[m]}(p) = p F_{h-1}^{[m]}(p) + m F_{h-1}^{[m-1]}(p). \quad (14)$$

Maintenant nous pouvons démontrer qu'une inconnue quelconque a_h du système (A) peut être représentée ainsi :

$$\begin{aligned} a_h = & F_h(p) + q F'_{h-1}(p) + \frac{q^2}{1 \cdot 2} F''_{h-2}(p) + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F_{h-3}^{[3]}(p) + \dots \\ & + \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \dots \frac{h}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{\left[\frac{h}{2}\right]}(p). \end{aligned} \quad (15)$$

Cette formule se rapporte au cas où h est un nombre *pair*; h étant *impair*, la puissance la plus élevée de l'inconnue q sera $\frac{h-1}{2}$.

Pour démontrer la formule (15) nous ferons voir qu'elle

est vraie pour a_{h+1} , si elle se vérifie pour a_{h-1} , et pour a_h .
 A (15) nous ajoutons donc :

$$\begin{aligned}
 a_{h-1} = & F_{h-1}(p) + qF'_{h-2}(p) + \frac{q^2}{1 \cdot 2} F''_{h-3}(p) + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F^{[3]}_{h-4}(p) + \dots \\
 & + \frac{q^{\frac{h-2}{2}}}{1 \dots \frac{h-2}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{[\frac{h-2}{2}]}(p) . \tag{16}
 \end{aligned}$$

Or, d'après le système (A)

$$a_{h+1} = pa_h + qa_{h-1} + A_{h+1} .$$

Donc a_{h+1} se trouve en ajoutant ensemble les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 A_{h+1} + pF_h(p) + pqF'_{h-1}(p) + p\frac{q^2}{1 \cdot 2} F^{[2]}_{h-2}(p) + p\frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F^{[3]}_{h-3}(p) + \dots \\
 + p\frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \cdot 2 \dots \frac{h}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{[\frac{h}{2}]}(p) \\
 qF_{h-1}(p) + q^2F'_{h-2}(p) + \frac{q^3}{1 \cdot 2} F^{[2]}_{h-3}(p) + \dots + \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \dots \frac{h-2}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{[\frac{h-2}{2}]}(p) .
 \end{aligned}$$

Les termes consécutifs de la formule résultante seront :

$$A_{h+1} + pF_h(p) = F_{h+1}(p) \qquad \text{voir (10)}$$

$$q \{ pF'_{h-1}(p) + F_{h-1}(p) \} = qF'_h(p) \qquad \text{» (12)}$$

$$\frac{q^2}{1 \cdot 2} \{ pF^{[2]}_{h-2}(p) + 2F'_{h-2}(p) \} = \frac{q^2}{1 \cdot 2} F^{[2]}_{h-1}(p) \qquad \text{» (13)}$$

$$\frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \cdot 2 \dots \frac{h}{2}} \left\{ pF_{\frac{h}{2}}^{[\frac{h}{2}]}(p) + \frac{h}{2} F_{\frac{h}{2}}^{[\frac{h}{2}-1]}(p) \right\} = \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \cdot 2 \dots \frac{h}{2} + 1} F_{\frac{h}{2} + 1}^{[\frac{h}{2}]}(p) \qquad \text{» (14)}$$

Il en résulte :

$$a_{h+1} = F_{h+1}(p) + qF'_h(p) + \frac{q^2}{1 \cdot 2} F_{h-1}^{[2]}(p) + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F_{h-2}^{[3]}(p) \dots$$

$$+ \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \cdot 2 \dots \frac{h}{2}} F_{\frac{h}{2}+1}^{\left[\frac{h}{2}\right]}(p) ,$$

c'est-à-dire précisément ce qu'il fallait démontrer.

Or, une simple vérification montrant que la formule est juste en posant $h = 1$ et $h = 2$, la vérité en est prouvée pour toute valeur entière de h .

Nous avons donc par exemple :

$$a_{2n-3} = F_{2n-3}(p) + qF'_{2n-4}(p) + \frac{q^2}{1 \cdot 2} F_{2n-2}^{[2]}(p) + \dots + \frac{q^{n-2}}{1 \dots (n-2)} F_{n-1}^{[n-2]}(p) ;$$

$$a_{2n-2} = F_{2n-2}(p) + qF'_{2n-3}(p) + \frac{q^2}{1 \cdot 2} F_{2n-4}^{[2]}(p) + \dots + \frac{q^{n-1}}{1 \dots (n-1)} F_{n-1}^{[n-1]}(p) .$$

De :

$$a_{2n-2}p + a_{2n-3}q + A_{2n-1} = 0 \quad (\text{ou} \quad a_{2n-1} = 0)$$

il en résulte :

(16)

$$F_{2n-1}(p) + qF'_{2n-2}(p) + \frac{q^2}{1 \cdot 2} F_{2n-3}^{[2]}(p) + \dots + \frac{q^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} F_n^{[n-1]}(p) = 0 ,$$

tandis que

$$a_{2n-2}q + A_{2n} = 0$$

peut se remplacer par :

$$qF_{2n-2}(p) + \frac{q^2}{1 \cdot 2} F'_{2n-3}(p) + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F_{2n-4}^{[2]}(p) + \dots$$

$$+ \frac{q^n}{1 \dots (2n-1)} F_{n-1}^{[n-1]}(p) + A_{2n} = 0 . \quad (17)$$

Enfin, $p \times (16) + (17)$ nous donne l'équation

$$F_{2n}(p) + qF'_{2n-1}(p) + \frac{q^2}{1 \cdot 2} F_{2n-2}^{[2]}(p) + \dots + \frac{q^n}{1 \cdot 2 \dots n} F_n^{[n]}(p) = 0 , \quad (18)$$

que l'on peut trouver immédiatement en considérant $a_{2n} = 0$.

Les équations finales sont d'après ce qui précède (16) et (18). Elles donnent directement les équations particulières qui nous ont servi à déduire, dans notre vérification et application, les résolvantes de Descartes et d'Euler.