

SUR LE PROBLÈME DE L'ÉCLAIREUR

Autor(en): **Turrière, Emile**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16321>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LE PROBLÈME DE L'ÉCLAIREUR

PAR

ÉMILE TURRIÈRE (Montpellier).

Je me propose de résoudre rapidement le problème de l'éclaireur, qui a fait l'objet de la Question du n° 746 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (Buray, 1896, pp. 35 et 93); le pseudonyme de *Buray* semble n'être autre qu'un anagramme du nom d'un géomètre bien connu des lecteurs de l'*Enseignement mathématique*.

1. Le problème de l'éclaireur consiste dans la détermination et l'étude de la trajectoire idéale que doit suivre un éclaireur, en mouvement uniforme, chargé de surveiller un ennemi en mouvement rectiligne et uniforme. D'une manière précise, ce problème peut être énoncé sous la forme suivante : Un plan est rapporté à deux axes rectangulaires (Ox, Oy). L'origine O représente un buisson, une maison... ou tout autre obstacle qui permette à l'éclaireur de dissimuler sa présence. L'ennemi E est supposé décrire uniformément une droite d'équation $y_1 = -a$; soit x_1 son abscisse. L'éclaireur, représenté par un point M du plan, de coordonnées (xy) , est assujéti à rester sur la droite EO prolongée au delà de O ; le point M doit se rapprocher constamment du point O en parcourant une trajectoire inconnue d'un mouvement uniforme. Le rapport des vitesses de l'éclaireur et de l'ennemi sera désigné par V .

Les équations qui traduisent les conditions de l'énoncé sont :

$$ax + x_1y = 0, \quad dx^2 + dy^2 = V^2 dx_1^2;$$

l'élimination de x_1 entre elles donne l'équation différentielle de la trajectoire inconnue de l'éclaireur :

$$y^4(dx^2 + dy^2) = a^2V^2(xdy - ydx)^2 .$$

La *courbe de l'éclaireur* est ainsi une courbe transcendante et panalgébrique. De sa définition précédente même, il résulte que cette courbe est rectifiable ; l'arc parcouru par l'éclaireur est mesuré par l'expression $aV(\cotg\Theta_0 - \cotg\Theta)$, Θ_0 et Θ étant les azimuts initial et courant de l'éclaireur.

2. Considérons maintenant la courbe de l'éclaireur, sous le point de vue tangentiel, comme étant enveloppée par la droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ;$$

l'équation différentielle précédemment formée équivaut à la relation

$$y^2 = K\varpi ,$$

dans laquelle la constante k est introduite pour désigner l'expression aV . La *courbe de l'éclaireur* est donc caractérisée par la propriété suivante : la distance du pôle O à la tangente courante est proportionnelle au carré de l'ordonnée du point courant.

Cette propriété contient le principe d'une construction bien simple de la tangente à la courbe de l'éclaireur en un point donné et, inversement, celui de la construction du point de contact d'une tangente imposée. Elle conduit aussi à l'équation de la courbe de l'éclaireur, dans le système de coordonnées tangentielles auxquelles M. M. D'OCAGNE a donné le nom de *coordonnées axiales*. De l'expression générale de l'ordonnée du point courant d'une courbe en fonction de l'angle φ ,

$$y = \varpi \sin \varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi} \cos \varphi = \cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varpi}{\cos \varphi} \right) ,$$

il résulte que l'équation différentielle de la courbe de l'éclaireur peut être transformée en l'équation différentielle :

$$\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varpi}{\cos \varphi} \right) = \sqrt{K\varpi} ;$$

introduisant alors les coordonnées axiales φ et $\lambda = \frac{\varpi}{\cos \varphi}$,
cette équation devient

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \sqrt{K\lambda} \cos^{-\frac{3}{2}} \varphi ;$$

l'équation définitive est ainsi

$$2\sqrt{\frac{\lambda}{K}} = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{\cos \varphi}} + \text{const} ;$$

la courbe de l'éclaireur est, par conséquent, une courbe transcendante, panalgébrique, dépendant des fonctions elliptiques.

De l'équation caractéristique $y^2 = K\varpi$ de la courbe de l'éclaireur, résulte par dérivation la relation

$$2y \frac{dy}{d\varphi} = K \frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

qui équivaut encore à la suivante :

$$\frac{2R}{K} = \frac{\frac{d\varpi}{d\varphi}}{y \cos \varphi} ;$$

cette proportion, entre le rayon de courbure R en un point courant de la courbe de l'éclaireur, le segment constant $\frac{K}{2}$,

la distance $\frac{d\varpi}{d\varphi}$ du pôle O à la normale courante et la projection de l'ordonnée courante sur la tangente courante, permet de construire le cercle osculateur en tout point de la courbe de l'éclaireur.

3. La courbe de l'éclaireur se rattache aussi à une courbe gauche remarquable. Adjoignons, en effet, aux deux axes Ox , Oy un troisième axe Oz , qui sera supposé vertical. Les équations de la courbe de l'éclaireur prouvent qu'elle est la projection horizontale de la courbe gauche définie par les équations :

$$ax + yz = 0 , \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = (V^2 + 1) dz^2 .$$

La trajectoire de l'éclaireur est donc la projection horizontale d'une hélice tracée sur un parabolôide hyperbolique à plan directeur horizontal.

Posons enfin :

$$x_1 = z = aZ, \quad x = ia\sqrt{X}, \quad y = ia\sqrt{Y};$$

les équations de l'hélice deviennent

$$X + YZ = 0 \quad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Les hélices considérées sont donc affines, par voie complexe, aux lignes de longueur nulle d'un parabolôide hyperbolique. Cette dernière propriété présente une grande importance, car elle donne naissance à une nouvelle méthode de détermination des équations de la courbe de l'éclaireur : il suffit de rapporter le parabolôide à ses lignes de courbure pour réduire aux fonctions elliptiques la détermination de ses lignes de longueur nulle.

23 mai 1915.

SUR LA DÉTERMINATION DES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FAMILLE DE CERCLES

PAR

L. BALLIF (Angoulême).

1. — Considérons d'abord une famille de cercles situés dans un même plan. Soient x, y les coordonnées du centre C d'un cercle, θ l'angle du rayon CM avec ox , et X, Y les coordonnées d'un point M du cercle. Ecrivons que MC est tangent au lieu de M

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dY}{dX}$$

et comme

$$X = x + R \cos \theta, \quad Y = y + R \sin \theta,$$