

# III. — Chainon logique. Démonstrations affectant la forme D'UNE SIMPLE SUITE DE CHAINONS LOGIQUES. DÉMONSTRATIONS RAMIFIÉES.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

effet, aucune proposition conditionnelle ne contient un jugement relatif à la vérité ou à la fausseté de l'hypothèse ; le jugement exprimé par une proposition conditionnelle se rapporte exclusivement au cas où l'hypothèse est vérifiée. Or, pour une proposition illusoire, ce cas ne se présente pas. Donc, malgré l'apparence contraire, celle-ci n'exprime en réalité aucun jugement et, dès lors, elle ne peut être ni vraie ni fausse.

Toutefois, lorsque, sans se demander si une proposition conditionnelle donnée est illusoire, on cherche à la démontrer suivant les règles ordinaires, on peut réussir même dans le cas où la proposition considérée est en réalité illusoire. Cela étant, nous conviendrons, comme on le fait, au moins implicitement, dans tous les traités de mathématiques, de regarder l'ensemble des propositions illusoires comme une classe particulière de propositions vraies. Cette convention ne nous expose à aucune contradiction parce qu'une proposition illusoire, ne contenant en réalité aucun jugement, ne peut être en contradiction avec quelque autre proposition qu'en apparence, mais jamais en réalité ; s'il arrive par exemple que, sans tenir compte de ce qu'une proposition conditionnelle peut être illusoire, on ait démontré deux propositions conditionnelles ayant même hypothèse mais telles qu'il y ait contradictions entre les conclusions, on n'aura nullement démontré deux propositions conditionnelles qui se contredisent ; en réalité, on aura simplement établi que chacune des deux propositions considérées est illusoire ; en d'autres termes, on aura démontré l'inexactitude de l'hypothèse commune des deux propositions conditionnelles.

### III. — CHAINON LOGIQUE. DÉMONSTRATIONS AFFECTANT LA FORME D'UNE SIMPLE SUITE DE CHAINONS LOGIQUES. DÉMONSTRATIONS RAMIFIÉES.

§ 10. — Avant d'aborder le sujet propre de ce chapitre, nous allons définir une expression qui permettra d'abrégé beaucoup le langage dans la suite.

Lorsque, en envisageant une proposition (T) dans une théorie, nous dirons qu'une autre proposition (P) est une proposition *reconnue vraie précédemment*, nous entendrons exprimer par là qu'elle satisfait à l'une des trois conditions suivantes :

1° Elle se confond soit avec une des prémisses énoncées avant la proposition (T), soit avec un théorème démontré avant d'énoncer cette proposition ;

2° Elle exprime une partie de tout ce qui est affirmé dans l'une des propositions qui satisfont à la condition précédente ;

3° Elle exprime la même chose que l'ensemble de certaines propositions dont chacune satisfait à l'une des deux conditions précédentes.

Ainsi par exemple, lorsqu'en développant un traité d'arithmétique, on a déjà établi chacune des deux propositions suivantes :

( $\alpha$ ) chacun des nombres 2, 3, 5 et 7 est un nombre premier ;

( $\beta$ ) le nombre 11 est un nombre premier,

dans ce cas, on pourra non seulement affirmer que chacune de ces deux propositions a déjà été reconnue vraie, mais encore on aura le droit de dire que, parmi les propositions reconnues vraies, il y a des propositions comme, par exemple, les suivantes :

« Le nombre 3 est un nombre premier » ;

« chacun des nombres 2 et 11 est un nombre premier » ;

etc.

§ 11. — Supposons qu'en développant une théorie mathématique (T) on veuille démontrer un certain théorème ( $A_0$ ). On pourra alors rechercher si, parmi les propositions reconnues vraies (§ 10) précédemment, il se trouve une proposition conditionnelle ( $C_1$ ) ou bien telle que sa conclusion coïncide avec la proposition ( $A_0$ ), ou telle qu'elle contienne au moins une indéterminée et puisse, au moyen de la substitution de symboles convenables aux indéterminées, être transformée en une proposition ( $C'_1$ ) ayant pour conclusion la proposition ( $A_0$ ). Supposons que l'une des conditions précédentes se vérifie et, selon que la première ou la seconde d'entre elles se présenterait, désignons par ( $A_1$ ) la proposition qui cons-

titue l'hypothèse de la proposition  $(C_1)$  ou de sa transformée  $(C'_1)$ .

S'il arrive que la proposition  $(A_1)$  est une proposition reconnue vraie (§ 10) précédemment, la proposition  $(A_0)$  devra évidemment être regardée comme démontrée. Nous dirons que l'ensemble des trois propositions  $(A_1)$ ,  $(C_1)$  et  $(A_0)$  constitue un *chaînon logique* ayant pour *première prémisse* la proposition  $(A_1)$ , pour *seconde prémisse* la proposition  $(C_1)$  et pour *conclusion* la proposition  $(A_0)$ .

Le lecteur n'aura pas de peine à constater que le syllogisme classique peut être regardé comme un chaînon logique de nature particulière.

§ 12. — Reprenons les notations du paragraphe précédent mais, sans rien changer aux autres hypothèses, ne supposons plus que la proposition  $(A_1)$  soit une proposition reconnue vraie (§ 10) antérieurement. Dans ce cas, la démonstration de la proposition  $(A_0)$  aura été ramenée à celle de la proposition  $(A_1)$  et l'on pourra chercher à démontrer la proposition  $(A_1)$  par la méthode que l'on avait essayé d'appliquer à la recherche de la démonstration de la proposition  $(A_0)$ . Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on conçoit comment on peut être amené à découvrir une suite de chaînons logiques vérifiant les conditions suivantes :

1° La première prémisse du premier chaînon fait partie de l'ensemble des propositions reconnues vraies antérieurement ;

2° la première prémisse de chaque chaînon, à partir du second, coïncide avec la conclusion de celui qui le précède immédiatement ;

3° la conclusion du dernier chaînon coïncide avec la proposition qu'il s'agissait de démontrer ;

4° la seconde prémisse de chaque chaînon fait partie de l'ensemble des propositions reconnues vraies (§ 10) précédemment.

Lorsqu'une suite de chaînons logiques vérifie ces quatre conditions, elle constitue évidemment une démonstration de la proposition que l'on voulait établir et cette démonstration aura la forme d'une simple suite de chaînons logiques.

Pour présenter un exemple simple du type précédent, observons que, d'après les éléments de l'Arithmétique, on a les propositions suivantes :

(A<sub>2</sub>) Chacun des symboles 3 et 7 représente un entier impair.

(C<sub>2</sub>) Lorsque chacun des symboles  $a$  et  $b$  représente un entier impair, le symbole <sup>1</sup>

$$(a + b)$$

représente un entier pair.

(C<sub>1</sub>) Lorsque le symbole  $c$  représente un entier pair, le symbole  $c^2$  représente un entier divisible par 4.

Ces propositions admises à titre de postulats, proposons-nous de démontrer le théorème suivant :

(A<sub>0</sub>) Le symbole

$$(3 + 7)^2$$

représente un entier divisible par 4.

A cet effet, observons que, à la suite de la substitution du symbole

$$(3 + 7)$$

à l'indéterminée  $c$  de la proposition conditionnelle (C<sub>1</sub>), la conclusion de celle-ci vient coïncider avec la proposition (A<sub>0</sub>) qu'il s'agit précisément de démontrer, tandis que l'hypothèse de la proposition conditionnelle considérée prend la forme suivante :

(A<sub>1</sub>) Le symbole

$$(3 + 7)$$

représente un entier pair.

Or, il suffit de substituer aux indéterminées  $a$  et  $b$  de la proposition conditionnelle (C<sub>2</sub>) les symboles 3 et 7 pour que la conclusion vienne coïncider avec la proposition (A<sub>1</sub>) et l'hypothèse — avec la prémisse (A<sub>2</sub>). Par conséquent, la démonstration du théorème (A<sub>0</sub>) se présente sous la forme d'une simple suite de chaînons logiques et peut être résumée

---

<sup>1</sup> Nous conserverons les parenthèses même là, où, d'ordinaire, on ne les emploie pas, pour n'avoir pas à nous appuyer sur les prémisses relatives à leur usage.

comme il suit : Il résulte des propositions  $(A_2)$  et  $(C_2)$  que la proposition  $(A_1)$  est vraie et les propositions  $(A_1)$  et  $(C_1)$  entraînent la proposition  $(A_0)$  qu'il s'agissait précisément de démontrer.

§ 13. — Lorsque le procédé exposé au § 12 ne permet pas d'arriver à la démonstration demandée, on peut quelquefois réussir à découvrir cette démonstration en combinant ce procédé avec la remarque suivante : s'il arrive que le sens d'une proposition coïncide avec celui de l'ensemble  $(S)$  de certaines autres propositions, il suffit, pour la démonstration, d'établir chacune des propositions du système  $(S)$ . La démonstration que l'on obtient de cette façon ne se réduit plus à une simple suite de chaînons logiques et prend la forme d'une combinaison d'un certain nombre de suites de ce genre. Il est naturel d'appeler *démonstrations ramifiées* les démonstrations de ce type.

Pour donner un exemple d'une démonstration ramifiée, adoptons, à titre de prémisses, les propositions suivantes :

(1) Lorsque trois entiers,  $a$ ,  $b$  et  $c$ , vérifient les égalités

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c ,$$

on a

$$a = c .$$

(2) Lorsque les symboles  $a$  et  $b$  représentent deux entiers, le symbole <sup>1</sup>

$$(a + b)$$

est aussi le symbole d'un nombre entier.

(3) Lorsque quatre entiers  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  vérifient les égalités

$$a = a' \quad \text{et} \quad b = b' ,$$

on a

$$(a + b) = (a' + b')$$

---

<sup>1</sup> Pour éviter d'énoncer les prémisses relatives à l'emploi des crochets, nous conservons ceux-ci comme nous avons eu déjà l'occasion de le faire dans un autre exemple, même là où il est d'usage de s'en passer.

- (4) Le symbole 3 représente un entier.  
 (5) » 7 » »  
 (6) » 8 » »  
 (7) » 5 » »  
 (8) » 10 » »  
 (9) » 13 » »  
 (10) » 23 » »  
 (11) On a

$$(3 + 7) = 10$$

- (12) On a

$$(8 + 5) = 13$$

- (13) On a

$$(10 + 13) = 23 .$$

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

- (A) On a

$$((3 + 7) + (8 + 5)) = 23 .$$

Démonstration.

*Lemme I*<sup>1</sup>. Le symbole

$$(3 + 7)$$

est celui d'un entier.

En effet, après la substitution des symboles 3 et 7 aux indéterminées  $a$  et  $b$  de la prémisse (2), l'hypothèse de celle-ci devient, en vertu des prémisses (4) et (5), une proposition vraie et la conclusion, une proposition qui coïncide avec celle qu'il s'agissait d'établir.

*Lemme II*. Le symbole

$$(8 + 5)$$

est celui d'un entier.

En effet, après la substitution des symboles 8 et 5 aux indéterminées  $a$  et  $b$  de la prémisse (2), l'hypothèse de celle-ci devient, en vertu des prémisses (6) et (7), une proposition vraie et la conclusion coïncide avec celle qu'il s'agissait de démontrer.

---

<sup>1</sup> On appelle *lemme* tout théorème intermédiaire qui se présente dans la démonstration d'un autre théorème, considéré comme formant l'objet propre du raisonnement que l'on développe.

*Lemme III.* Le symbole

$$((3 + 7) + (8 + 5))$$

est celui d'un nombre entier.

En effet, après la substitution des symboles

$$(3 + 7) \quad \text{et} \quad (8 + 5)$$

aux indéterminées  $a$  et  $b$  de la prémisse (2), l'hypothèse de celle-ci devient, en vertu des lemmes I et II, une proposition vraie et la conclusion, une proposition qui coïncide avec celle qu'il s'agissait de démontrer.

*Lemme IV.* Le symbole

$$(10 + 13)$$

est celui d'un nombre entier.

En effet, après la substitution des symboles

$$10 \quad \text{et} \quad 13$$

aux indéterminées  $a$  et  $b$  de la prémisse (2), l'hypothèse de celle-ci devient, en vertu des prémisses (8) et (9), une proposition vraie et la conclusion, une proposition qui coïncide avec celle qu'il s'agissait d'établir.

*Lemme V.* On a

$$((3 + 7) + (8 + 5)) = (10 + 13) .$$

En effet, après la substitution des symboles

$$(3 + 7), \quad (8 + 5), \quad 10 \quad \text{et} \quad 13$$

aux indéterminées

$$a, \quad b, \quad a', \quad b'$$

de la prémisse (3), l'hypothèse de celle-ci, devient, en vertu des lemmes I et II et des prémisses (8), (9), (11) et (12) une proposition vraie et la conclusion, une proposition qui coïncide avec celle que nous voulions établir.

Actuellement, il est aisé de démontrer la proposition (A) elle-même. En effet, en substituant dans la prémisse (1), aux



indéterminées

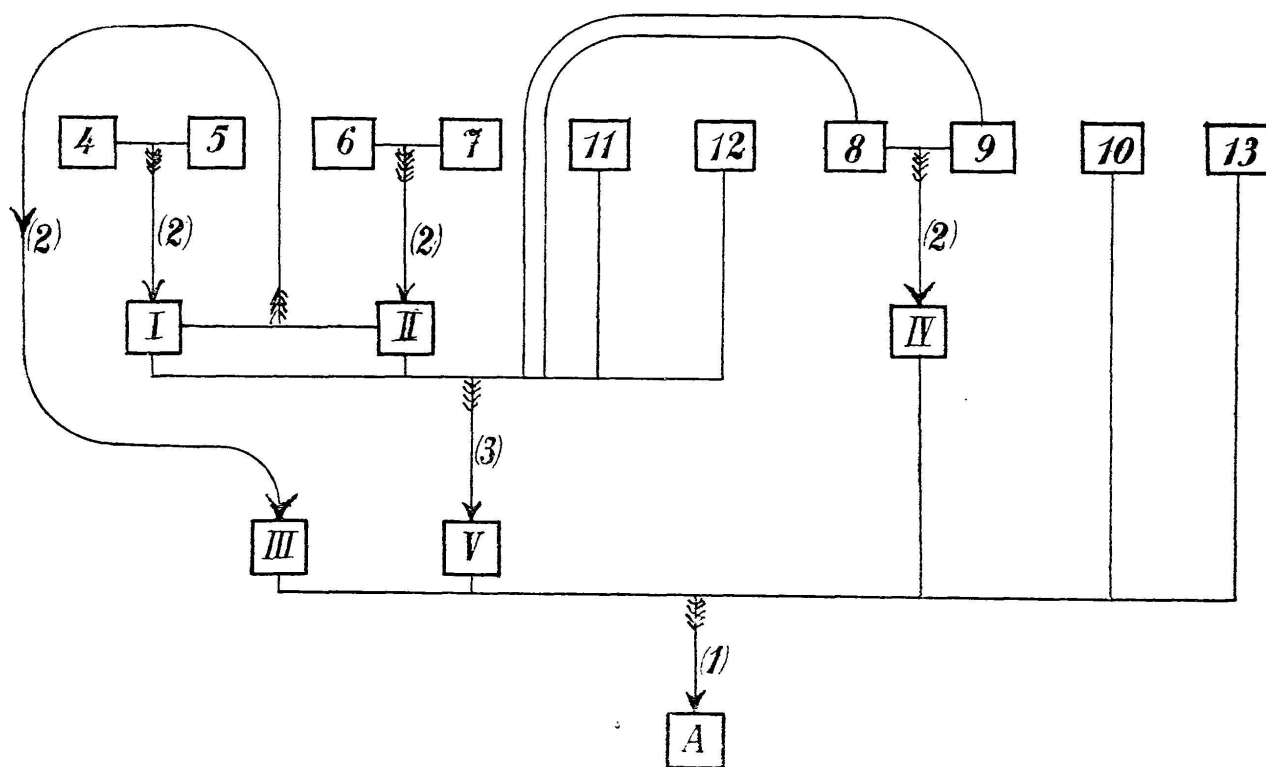
 $a, b, c$ 

les symboles

 $((3 + 7) + (8 + 5)), (10 + 13)$  et 23

on constate que, dans cette proposition, l'hypothèse devient, en vertu des lemmes III et IV, de la prémisse (10), du lemme V et de la prémisse (13) une proposition vraie, la conclusion venant coïncider alors avec la proposition (A) qu'il s'agissait justement de démontrer.

Le diagramme ci-joint permettra de se faire une idée d'ensemble de la démonstration précédente.



Dans ce diagramme, les chiffres arabes renvoient aux prémisses et les chiffres romains, aux lemmes; les flèches figurent le rôle des propositions conditionnelles indiquées par les chiffres arabes écrits à côté de celles-ci; enfin les traits qui n'affectent pas la forme de flèches servent à mettre en évidence les combinaisons dans lesquelles les prémisses et les lemmes entrent dans chaque chaînon logique.