IV. — Procédé particulier applicable a la démonstration DES PROPOSITIONS CONDITIONNELLES. MÉTHODE D'INDUCTION MATHÉMATIQUE. MÉTHODE DE LA REDUCTION A L'ABSURDE. POSTULATS HYPOTHÉTIQUES.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

IV. — Procédé particulier applicable a la démonstration des propositions conditionnelles. Méthode d'induction mathématique. Méthode de la réduction a l'absurde. Postulats hypothétiques.

§ 14. — Contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, les propositions catégoriques ne sont pas les seules dont la démonstration puisse affecter l'une des formes considérées au chapitre précédent. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer que l'hypothèse et la conclusion d'une proposition conditionnelle peuvent être elles-mêmes des propositions conditionnelles.

Voici d'ailleurs un exemple simple où la démonstration d'une proposition conditionnelle est effectuée au moyen d'un chaînon logique, formé de la façon expliquée au § 11. Adoptons, à titre de prémisses, les deux propositions suivantes :

(A_1) Lorsque les symboles l, m, n représentent trois entiers quelconques, on a :

$$l + m + n = l + (m + n) \ .$$

(C) Lorsque, pour un ensemble (E), la proposition suivante est vraie :

(P_1) Pourvu que l'on désigne par a, b et c trois éléments quelconques de l'ensemble (E), on a :

$$a + b + c = a + (b + c) \ ,$$

dans ce cas, pour l'ensemble considéré, sera vraie aussi la proposition que voici :

(P_2) Pourvu que l'on désigne par x, y, z, t quatre éléments quelconques de l'ensemble (E), on a :

$$x + y + z + t = x + (y + z + t) \ .$$

Ceci admis, il est aisé de démontrer le théorème suivant :

(A_0) Lorsque les symboles p, q, r, s représentent quatre entiers quelconques, on a :

$$p + q + r + s = p + (q + r + s) \ .$$

En effet, substituons aux indéterminées:

élément de l'ensemble (E), a, b, c, x, y, z, t,

de la proposition conditionnelle (C), les éléments suivants:

un entier, l, m, n, p, q, r, s.

Dans ce cas, l'hypothèse (P_1) et la conclusion (P_2) de la proposition conditionnelle (C) se transformeront en deux propositions exprimant respectivement les mêmes choses que les propositions (A_1) et (A_0). La première de ces propositions étant vraie (puisqu'elle est une prémisse), la seconde le sera nécessairement, comme il s'agissait de le démontrer.

§ 15. — Bien que, d'après ce qui précède, il puisse arriver que la démonstration d'une proposition conditionnelle assume l'une des formes considérées au chapitre précédent, ce cas ne se présente, dans la pratique, que d'une façon exceptionnelle.

Ordinairement on est obligé de recourir à l'artifice suivant: on adjoint momentanément l'hypothèse du théorème que l'on veut établir à l'ensemble des prémisses et l'on cherche à démontrer la proposition qui constitue la conclusion du théorème au moyen des procédés étudiés au chapitre précédent; si l'on y parvient, on aura évidemment démontré par le fait le théorème lui-même qu'il s'agissait d'établir.

Pour donner un exemple simple de l'application de cette méthode, adoptons à titre de prémisse la proposition suivante:

(1) Lorsque les symboles a, b, c représentent trois entiers vérifiant les relations

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c ,$$

on a

$$a = c .$$

Cela posé, proposons-nous de démontrer le théorème suivant:

(T). Lorsque les symboles p, q, r, s représentent des entiers vérifiant les relations

$$p = q , \quad q = r , \quad r = s ,$$

on a

$$p = s .$$

Conformément aux prescriptions de la méthode, adjoignons à la prémisse (1), à titre de prémisse provisoire, l'hypothèse du théorème (T) ; en d'autres termes, regardons provisoirement comme vraies les sept propositions suivantes :

(2) Le symbole p représente un entier.
(3) » » q » » »
(4) » » r » » »
(5) » » s » » »
(6) On a $p = q$.
(7) On a $q = r$.
(8) On a $r = s$.

Lemme I. On a $p = r$.

En effet, en substituant aux indéterminées

$$a\,,\quad b\,,\quad c$$

de la proposition (1), les symboles p, q, r, on transforme l'hypothèse de celle-ci en une proposition vraie comme équivalente, quant au sens, à l'ensemble des prémisses (2), (3), (4), (6) et (7). D'autre part, dans les mêmes conditions, la conclusion de la proposition (1) vient coïncider avec le lemme que nous voulions établir. Donc, ce lemme est démontré.

Cela posé, il suffit de substituer aux indéterminées

$$a\,,\quad b\,,\quad c$$

de la proposition (1) les symboles

$$p\,,\quad r\,,\quad s\,,$$

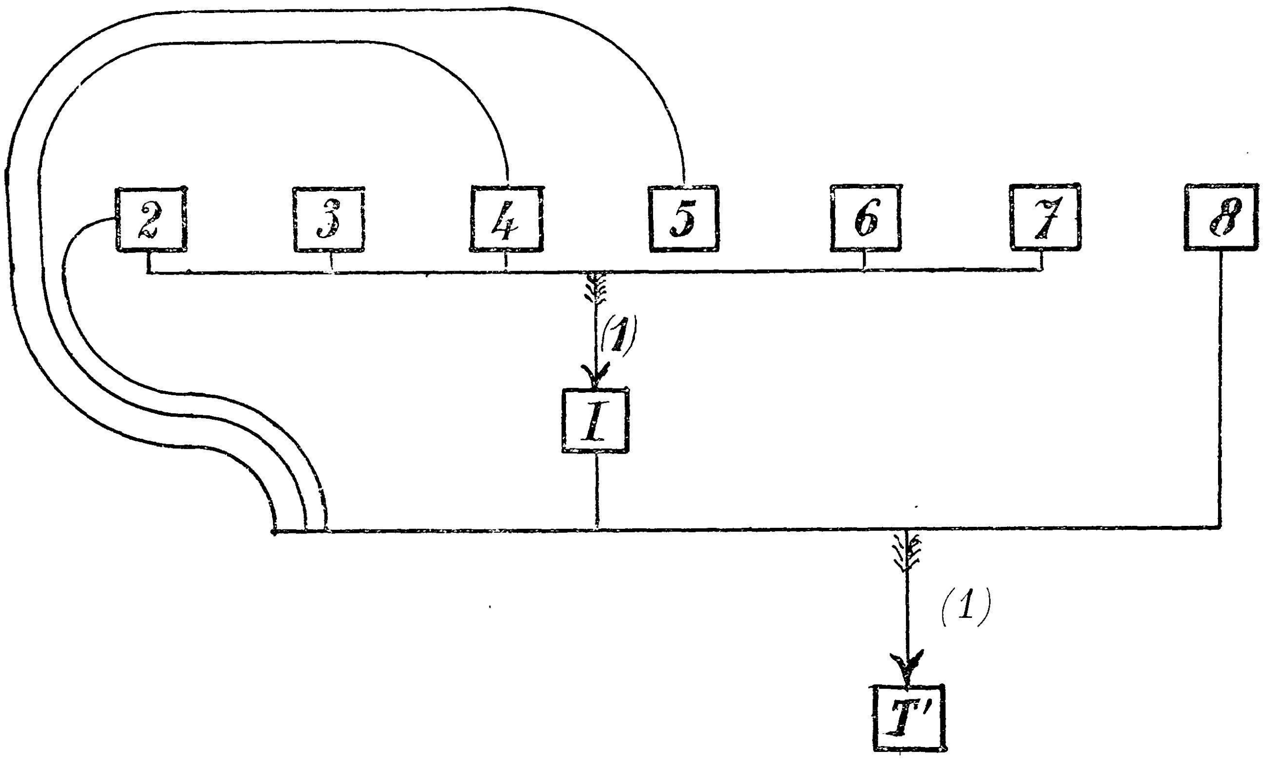
pour constater que l'ensemble des prémisses (2), (4), (5), avec le lemme I et la prémisse (8) d'une part, et la proposition (1) d'autre part, constituent la première et la seconde prémisses d'un chaînon logique qui a pour conclusion la relation

$$p = s\,. \tag{T'}$$

Or, cette relation représente la conclusion du théorème (T) ; donc, d'après les principes généraux exposés plus haut, le théorème (T) lui-même doit être regardé comme démontré.

On peut, suivant le procédé employé déjà au § 13, représenter, au moyen du diagramme ci-joint, la déduction de l'égalité (T′) des propositions

(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8).



§ 16. — Le procédé de démonstration connu sous le nom de *méthode d'induction mathématique* rentre, comme on le verra, dans la catégorie de ceux que nous avons déjà étudiés mais, à cause du postulat remarquable sur lequel il repose et de sa fécondité, il mérite d'être étudié à part, bien qu'il ne soit applicable qu'à une classe particulière de théorèmes. Cette classe de théorèmes est constituée par ceux dont l'énoncé peut être mis sous la forme générale suivante :

I. Lorsqu'un symbole n représente un nombre entier non inférieur à un nombre entier donné k, une certaine proposition (P), dont l'énoncé contient le symbole n, est vraie.

Tout théorème de cette forme est évidemment une proposition conditionnelle qui a la proposition (P) pour conclusion et, pour hypothèse, la suivante :

Le symbole n représente un nombre entier non inférieur à l'entier donné k.

Voici, à titre d'exemple, l'énoncé d'un théorème de la classe considérée :

Lorsque le symbole n représente un nombre entier non inférieur au nombre 2, la somme s_n de tous les entiers de 1 à n inclusivement vérifie l'égalité suivante :

$$2 . s_n = n . (n + 1) .$$

Dans les traités de mathématiques, on présente ordinairement la démonstration d'un théorème du type I de la façon suivante :

On démontre d'abord, au moyen des procédés étudiés précédemment, les deux propositions suivantes :

(1) La proposition (P_k) en laquelle se transforme la proposition (P), à la suite de la substitution du nombre k au symbole n, est vraie.

(2) Si la proposition (P_q) en laquelle se transformerait la proposition P à la suite de la substitution au symbole n d'un entier q, non inférieur à k, était vraie, la proposition (P_{q+1}), obtenue en substituant l'entier $q + 1$ à n dans la proposition (P), serait vraie aussi.

Cela posé, on termine la démonstration par l'affirmation suivante :

(C) Donc, la proposition (P) est vraie pour toute valeur entière de n non inférieure à k comme il fallait le démontrer.

Quelquefois, on fait précéder la proposition (C) par les paroles suivantes : « la proposition (P) étant vraie pour

$$n = k ,$$

elle le sera, en vertu de (2), pour

$$n = k + 1 ;$$

étant vraie pour

$$n = k + 1 ,$$

la proposition (P) le sera encore, en vertu de (2), pour

$$n = k + 2$$

etc. »

Telles sont précisément les démonstrations que l'on dit être effectuées par la méthode d'induction mathématique et que l'on appelle aussi *démonstrations par induction*.

Il est aisé de voir que, en réalité, dans une démonstration de la forme précédente, le théorème qu'il s'agissait d'établir se présente comme la conclusion d'un chaînon logique dont la première prémisse est formée par l'ensemble des propositions (1) et (2) et la seconde, par le postulat, évidemment vrai, que voici :

(A) *Lorsqu'un entier* p *fait partie d'un certain ensemble* (E), *lorsqu'en outre il suffit qu'un entier* r, *non inférieur à* p, *fasse partie de l'ensemble* (E) *pour que l'entier*

$$r+1$$

fasse aussi partie de cet ensemble, dans ce cas, tout entier non inférieur à p *fait partie de l'ensemble* (E).

En effet, substituons aux indéterminées :

p ; un certain ensemble (E) ; r,

de la proposition (A) les expressions suivantes :

k ;

ensemble des valeurs de n pour lesquelles la proposition (P) est vraie ;

q .

Après cette substitution, l'hypothèse de la proposition (A) se transformera en une proposition qui exprimera la même chose que l'ensemble des propositions (1) et (2) et la conclusion, en une proposition équivalente, quant au sens, au théorème (T) que l'on voulait démontrer.

En résumé, on voit que les démonstrations « par induction » ne sont pas, quant à leur structure, différentes de celles qui ont été étudiées précédemment ; ce qui caractérise ces démonstrations, c'est l'emploi du remarquable postulat (A).

D'ailleurs la « méthode d'induction mathématique » est tellement importante que Poincaré y voyait la principale source de la fécondité des sciences mathématiques [1].

Les exemples de l'application de cette méthode dans les

[1] Poincaré. *La Science et l'Hypothèse.*

traités de Mathématiques sont si fréquents qu'il nous a paru superflu d'en donner un dans ce travail.

En terminant ce paragraphe, il convient de faire remarquer que la méthode d'induction mathématique diffère essentiellement de la méthode inductive des sciences expérimentales. A la vérité il y a bien, dans les deux cas, un passage du particulier au général mais il repose, dans ces deux cas, sur des bases tout à fait différentes.

§ 17. — La méthode de démonstration, appelée *méthode de réduction à l'absurde,* est intimement liée à la méthode de démonstration des propositions conditionnelles exposée au § 15. Voici en quoi consiste la méthode de réduction à l'absurde : pour établir un théorème (T), on adjoint provisoirement à l'ensemble des propositions reconnues vraies précédemment (§ 10) la proposition (T′) qui exprime la négation de l'exactitude de la proposition (T) et, en se servant des procédés de démonstration exposés plus haut, on démontre une proposition (P′) qui exprime la négation de l'exactitude d'une proposition (P) que l'on sait être vraie; ce résultat obtenu, on conclut que la proposition (T′) est fausse et que, par conséquent, la proposition (T) qu'il s'agissait de démontrer est vraie.

Cette façon de procéder revient à établir d'abord, au moyen de l'artifice exposé au § 15, la proposition conditionnelle suivante : « si la proposition (T′) était vraie, la proposition (P′) le serait aussi[1] », et à démontrer ensuite, par une méthode que nous avons déjà étudiée au chapitre précédent, le théorème (T) en utilisant les postulats, évidemment vrais, que voici :

(1) Lorsqu'une proposition (P′) constitue la négation d'une proposition vraie (P), elle est fausse.

(2) Lorsque, dans une proposition conditionnelle vraie, la conclusion (P′) est fausse, l'hypothèse (T′) de la proposition conditionnelle considérée est fausse aussi.

---

[1] La proposition placée dans le texte entre des guillemets est en réalité une proposition illusoire (§ 9); on voit donc ici comment des propositions de ce genre peuvent apparaître momentanément dans les théories mathématiques.

(3) Lorsque la négation (T′) d'une proposition (T) est fausse, la proposition (T) est vraie.

En résumé, la démonstration d'un théorème par « la réduction à l'absurde » ne diffère pas, quant à sa structure, des formes de démonstrations considérées précédemment et son caractère propre tient en réalité seulement à la nature particulière de certains postulats qu'elle fait intervenir.

§ 18. — Il arrive souvent qu'une théorie mathématique, comme par exemple la géométrie non euclidienne, a pour but l'étude de ce qui arriverait dans le cas où certaines conditions (C) seraient vérifiées. Il est évident que les théorèmes d'une théorie de ce genre sont en réalité des propositions conditionnelles dont les hypothèses contiennent l'ensemble (E) des propositions exprimant que les conditions (C) sont vérifiées.

Pour appliquer à la démonstration de ces théorèmes la méthode du § 15 et pour éviter des longueurs inutiles, on regarde les propositions de l'ensemble (E) comme faisant partie des postulats de la théorie. Dans ce cas, les propositions de l'ensemble (E) constituent une catégorie de postulats qui ont cela de particulier que, en réalité, on ne se prononce nullement sur la question de savoir si ces postulats sont des propositions vraies. Il semble naturel de donner à ces postulats le nom de postulats *hypothétiques* en réservant aux autres postulats le nom d'*axiomes*. On peut, soit dit en passant, diviser les axiomes en *axiomes relatifs* et *axiomes absolus* en convenant de regarder un axiome comme faisant partie de la première ou de la seconde catégorie selon qu'il existe une théorie où l'axiome considéré est une proposition ayant le caractère d'un théorème, ou que cette circonstance ne se présente pas.

Il est évident que toute définition peut être considérée comme un postulat hypothétique ; ainsi par exemple la définition ordinaire des droites parallèles peut être regardée comme exprimant l'hypothèse de l'identité du sens de l'assertion que deux droites sont parallèles et de l'assertion que les droites considérées sont situées dans un même plan sans avoir aucun point commun.

En rapprochant ces remarques de celles qui ont été faites au § 6, on arrive à la conclusion que les différentes subdivisions des prémisses d'une théorie, si importantes qu'elles soient quant à la façon de concevoir l'ensemble de la théorie, ont un caractère éminemment subjectif. Mais il importe de faire remarquer que cette circonstance n'affaiblit en rien la puissance des démonstrations comme moyen de provoquer la conviction et cela pour la raison suivante : ainsi que nous l'avons annoncé au § 4 et comme cela résulte des développements présentés au chapitre précédent et dans le chapitre actuel, la seule division des propositions formant une théorie mathématique qui soit importante au point de vue de la structure des démonstrations est la division de ces propositions en prémisses et en théorèmes. Or, pour toute théorie déjà constituée, cette division repose sur un caractère qui ne dépend pas du point de vue où l'on se place et elle est d'une parfaite netteté.

V. — Examen critique des vues précédentes.

§ 19. — Il est tout d'abord naturel de se demander si toute démonstration mathématique rentre nécessairement dans les cadres sommairement tracés dans les deux chapitres précédents.

Nous croyons, sans pouvoir appuyer notre opinion d'une démonstration, qu'il en est bien ainsi pour toute démonstration *complète* (c'est-à-dire développée d'une façon tout à fait détaillée) à condition de tenir compte de ce fait que, en dehors des ramifications explicitement considérées au § 13, la démonstration d'un théorème peut en contenir d'autres provenant de la démonstration de propositions conditionnelles qui forment les secondes prémisses de certains chaînons logiques se présentant dans la démonstration du théorème considéré.

§ 20. — Actuellement nous allons examiner une objection grave qu'il est possible de soulever contre les démonstrations mathématiques et que l'on peut présenter de la manière