DES EQUATIONS PRIMITIVES TRINOMES DU SECOND DEGRÉ

DES ÉQUATIONS PRIMITIVES TRINOMES DU SECOND DEGRÉ

PAR

H. E. HANSEN (Copenhague).

I. — *L'équation* $a + x^2 = y^2$.

p et q désignant des nombres entiers et premiers entre eux, pour p *pair,* q *impair* (ou vice versa), considérons l'identité

$$4pq + (p - q)^2 = (p + q)^2 \qquad \text{(I)}$$

et pour p et q, *tous les deux impairs,* la suivante

$$pq + \left(\frac{p - q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p + q}{2}\right)^2 \qquad \text{(II)}$$

Ces identités nous fourniront des moyens pour résoudre l'équation donnée.

Si l'on veut employer (I), il faut que a puisse s'écrire $4pq$, où p doit être pair. Ainsi a aura au moins 2^3 comme facteur.

Exemple 1. $a = 4 . 2^\alpha \times$ *un nombre premier impair.*

Les valeurs pour α étant 1, 2, 3 ... , il s'ensuit que dans la formule (I) p sera 2^α et q le nombre premier donné. Ainsi nous n'aurons qu'une seule solution :

$$x = \pm (q - 2^\alpha) \qquad \text{et} \qquad y = q + 2^\alpha .$$

Exemple 2. $a = 4 . 2^\alpha \times$ *un nombre impair composé.*

Dans la formule (I) p et q seront les deux facteurs, premiers entre eux, de tous les *couples de facteurs* qui peuvent se former de 2^α et des facteurs premiers du nombre composé donné. Ainsi les facteurs 2^α, k^β et l^γ forment les couples :

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2^\alpha, & k^\beta, & l^\gamma \\ 2^\alpha k^\beta l^\gamma & k^\beta l^\gamma & 2^\alpha l^\gamma & 2^\alpha k^\beta \end{array}$$

c'est-à-dire 2^{3-1} couples en tout.

Si l'on a donné les quatre facteurs, premiers entre eux, 2^α, k, l et m, ils fourniront les couples

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2^\alpha, & k, & l, & m, & 2^\alpha k, & 2^\alpha l, & 2^\alpha m \\ 2^\alpha klm & klm & 2^\alpha lm & 2^\alpha km & 2^\alpha kl & lm & km & kl \end{array}$$

c'est-à-dire 2^{4-1} couples.

Pour n facteurs, on aura 2^{n-1} couples et par suite 2^{n-1} *solutions* de l'équation proposée.

Si l'on veut employer la formule (II), nous procéderons de la même manière.

Exemple 1. $a =$ *un nombre premier impair.*

Pour pq on met le nombre donné, a, et on n'aura que le seul couple de facteurs, a et 1, à poser dans la formule, respectivement pour p et q. Ainsi on n'aura que la seule solution :

$$x = \frac{a-1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{a+1}{2} .$$

Exemple 2. $a =$ *un nombre impair, composé de* n *facteurs premiers.*

Comme plus haut, les n facteurs forment 2^{n-1} couples de facteurs premiers entre eux, et ainsi on aura 2^{n-1} *solutions.*

Application à des exemples numériques :

L'équation (I) peut s'écrire

$$p + q = \sqrt{(p-q)^2 + 4pq} \quad \text{ou} \quad p - q = \sqrt{(p+q)^2 - 4pq} .$$

et l'équation (II)

$$\frac{p+q}{2} = \sqrt{\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 + pq} \quad \text{ou} \quad \frac{p-q}{2} = \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq} .$$

Exemple 1. $p+q=\sqrt{z^2+4.2.3.5}$.

Les couples de facteurs mentionnés plus haut deviennent:

$$\begin{array}{cccc} 1\,, & 2\,, & 3\,, & 5\,, \\ 2.3.5 & 3.5 & 2.5 & 2.3 \end{array}$$

Si l'équation est primitive et en nombres entiers, il faut avoir $z=29$, 13, 7 ou 1, et les racines correspondantes $p+q$ seront 31, 17, 13 et 11.

Exemple 2. $\frac{p-q}{2}=\sqrt{z^2-3.5.7}$.

Les couples de facteurs sont

$$\begin{array}{cccc} 1\,, & 3\,, & 5\,, & 7\,, \\ 3.5.7 & 1.5.7 & 1.3.7 & 1.3.5 \end{array}$$

Il faut donc qu'on ait $z=53$, 19, 13 ou 11, et les racines $\frac{p-q}{2}$ deviendront 52, 16, 8 et 4.

Exemple 3. Soit

$$x=\sqrt{1508^2+88305}\ ;$$

pour savoir, sans calcul ordinaire, si la racine est rationnelle, il faut examiner si les deux termes sous le signe radical ont un facteur commun. On trouvera le facteur 29; et en outre 88305 étant divisible par 29^2, il s'ensuit

$$x=29\sqrt{52^2+105}\ .$$

Comme 52 est égal à $\frac{105-1}{2}$, la racine sera $\frac{105+1}{2}$, et ainsi on a

$$x=29.53\ .$$

II. — *L'équation* $x+y^2=a^2$.

A l'aide des équations (I) et (II) on sera à même de déterminer x et y.

Il y aura trois cas différents, selon qu'on a a égal à 1° un nombre premier impair, 2° un nombre impair composé ou 3° un nombre pair composé.

1er cas. — Selon (I) nous aurons une solution pour chacune des manières différentes de décomposer un nombre, a, en deux nombres, p et q, qui soient premiers entre eux.

Au cas donné, a sera premier avec tous les nombres de 1 à $a - 1$, et il peut ainsi être décomposé en : 1 et $(a - 1)$, 2 et $(a - 2)$, 3 et $(a - 3)$, ..., $\frac{a-1}{2}$ et $\left(a - \frac{a-1}{2}\right)$. *Le nombre des solutions* d'après (I) sera ainsi $\frac{a-1}{2}$.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} 7 = 1 + 6 & \text{donne} & 4.1.6 + 5^2 = 7^2 \\ 2 + 5 & & 4.2.5 + 3^2 = 7^2 \\ 3 + 4 & & 4.3.4 + 1^2 = 7^2 . \end{array}$$

Suivant l'équation (II), il faut qu'on ait la quantité a décomposée en $\frac{p+q}{2}$, ou $2a$ en $p + q$, où p et q sont tous les deux impairs et premiers entre eux ; ainsi $2a$ peut être décomposé en : 1 et $(2a - 1)$, 3 et $(2a - 3)$, 5 et $(2a - 5)$, ..., $(a - 2)$ et $(a + 2)$.

Le nombre des couples, et par conséquent *des solutions,* devient $n = \frac{a - 2 + 1}{2} = \frac{a-1}{2}$, c'est-à-dire le même que plus haut.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} 2a = 14 = 1 + 13 & \text{donne} & 1.13 + 6^2 = 7^2 \\ 3 + 11 & & 3.11 + 4^2 = 7^2 \\ 5 + 9 & & 5.\ 9 + 2^2 = 7^2 . \end{array}$$

2e cas. — Il faut, comme plus haut, connaître les nombres inférieurs à a et premiers avec celui-ci. Du reste, il suffira de connaître la première moitié de ceux-ci.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} a = 15 = 1 + 14 & \text{donne} & 4.1.14 + 13^2 = 15^2 \\ 2 + 13 & & 4.2.13 + 11^2 = 15^2 \\ 4 + 11 & & 4.4.11 + 7^2 = 15^2 \\ 7 + 8 & & 4.7.\ 8 + 1^2 = 15^2 . \end{array}$$

Le nombre des solutions est donc $\varphi(a) : 2$, $\varphi(a)$ désignant le nombre des entiers inférieurs à a et premiers avec lui.

D'une manière pareille on peut faire usage de l'équation (II), quand on a déterminé la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci.

Ainsi on trouvera pour $a = 15$:

Exemple.

$2a = 30 =$	$1 + 29$	donne	$1.29 + 14^2 = 15^2$
	$7 + 23$		$7.23 + 8^2 = 15^2$
	$11 + 19$		$11.19 + 4^2 = 15^2$
	$13 + 17$		$13.17 + 2^2 = 15^2$.

Le nombre des relations est $\varphi(a) : 2$.

3^e^ cas. — Le nombre donné étant pair, l'équation (I) ne donne aucune équation primitive, et, par conséquent, nous n'aurons *aucune solution*.

Pour avoir des solutions d'après (II), il faut encore connaître la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci. Soit $a = 12$, $2a = 24 = 2^3.3$, on a $\varphi(24) = 2^2(2 - 1)(3 - 1) = 8$.

Exemple.

$2a = 24 =$	$1 + 23$	donne	$1.23 + 11^2 = 12^2$
	$5 + 19$		$5.29 + 7^2 = 12^2$
	$7 + 17$		$7.17 + 5^2 = 12^2$
	$11 + 13$		$11.13 + 1^2 = 12^2$.

Le nombre des solutions devient $\varphi(2a) : 2$.

III. — *L'équation* $x + a^2 = y^2$.

Les équations (I) et (II) nous donneront aussi, pour un a donné, des solutions de cette équation. On aura à traiter, comme plus haut, les trois cas différents désignés.

1^er^ cas. — En se servant de l'équation (I), il faut écrire le nombre premier donné, a, comme une différence entre deux nombres impairs et premiers entre eux. Mais cela pourra se faire d'innombrables manières. Les nombres de 1 à $a - 1$ sont premiers avec a, et, par conséquent, on peut les poser pour q, comme nombres à soustraire, dans l'équation $a = p - q$, quand pour p on met $a + q$.

Exemple.

$a = 7 = 8 - 1$	donne	$4.1.\ 8 + 7^2 = 9^2$
$9 - 2$		$4.2.\ 9 + 7^2 = 11^2$
$10 - 3$		$4.3.10 + 7^2 = 13^2$
$11 - 4$		$4.4.11 + 7^2 = 15^2$
$12 - 5$		$4.5.12 + 7^2 = 17^2$
$13 - 6$		$4.6.13 + 7^2 = 19^2$.

On peut *continuer à l'infini* en ajoutant des multiples de 7. Ainsi nous aurons :

$15 - 8$	donne	$4\text{-}8\text{-}15 + 7^2 = 23^2$
$16 - 9$		$4\text{-}9\text{-}16 + 7^2 = 25^2$
$17 - 10$		$4\text{-}10\text{-}17 + 7^2 = 27^2$
etc.		etc.

Usant de l'équation (II), il nous faut décomposer a en $\frac{p-q}{2}$, ou $2a$ en $p - q$. Pour $a = 7$, $2a = 14$, on doit donc poser pour q les $\varphi(14)$, ou 6, nombres qui sont inférieurs à 14 et premiers avec ce nombre, savoir 1, 3, 5, 9, 11, 13.

Exemple.

$2a = 14 = 15 - 1$	donne	$1.15 + 7^2 = 8^2$
$17 - 3$		$3.17 + 7^2 = 10^2$
$19 - 5$		$5.19 + 7^2 = 12^2$
$23 - 9$		$9.23 + 7^2 = 16^2$
$25 - 11$		$11.25 + 7^2 = 18^2$
$27 - 13$		$13.27 + 7^2 = 20^2$
$29 - 15$		$15.29 + 7^2 = 22^2$
$31 - 17$		$17.31 + 7^2 = 24^2$
$33 - 19$		$19.33 + 7^2 = 26^2$
etc.		etc.

2^e *cas*. — Quand on a pour *a un nombre composé impair*, on procède comme plus haut ; il faut, toutefois, commencer par la détermination des nombres qui se trouvent inférieurs à a et premiers avec celui-ci.

3^e *cas*. — Ayant pour *a un nombre pair*, l'équation (I) ne donnera aucune solution primitive.

Par contre, l'équation (II) nous donnera *d'innombrables solutions*. Pour $a = 18$, nous avons $2a = 36$, et les $\varphi(36)$, ou 12, nombres inférieurs à 36 et premiers avec lui, sont 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, d'où suit :

Exemple.

$2a = 36 = 37 - 1$	donne	$1.37 + 18^2 = 19^2$	
$41 - 5$		$5.41 + 18^2 = 23^2$	
$43 - 7$		$7.43 + 18^2 = 25^2$	
$47 - 11$		$11.47 + 18^2 = 29^2$	
. . . .		. . . .	
. . . .		. . . .	
$73 - 37$		$37.73 + 18^2 = 55^2$	
$77 - 41$		$41.77 + 18^2 = 59^2$	
etc.		etc.	

IV. — *L'équation* $a^2 + x^2 = y^2$.

(« Equation pythagorique »).

Les nombres pythagoriques se laissent déterminer de la plus simple manière à l'aide des équations (I) et (II), si l'on pose, seulement, pour p et q des nombres carrés correspondants, et en employant, *dans le premier terme,* successivement tous les nombres carrés.

Exemple. $4 . 2^2 . 3^2 . 5^2 = 60^2$ donne les couples de facteurs :

$$\frac{1^2}{2^2.3^2.5^2}, \quad \frac{2^2}{3^2.5^2}, \quad \frac{3^2}{2^2.5^2}, \quad \frac{5^2}{2^2.3^2}$$

dont on aura

$$60^2 + 899^2 = 901^2$$
$$60^2 + 221^2 = 229^2$$
$$60^2 + 91^2 = 109^2$$
$$60^2 + 11^2 = 61^2 .$$

On trouve toutes les valeurs cherchées, en employant seulement l'équation (II), où successivement on met dans le premier terme tous les nombres *impairs* de toute la suite des nombres. Si a est un nombre composé, il faut le décomposer en ses facteurs premiers, et de ceux-ci on doit former, comme nous l'avons montré dans ce qui précède, tous les couples des facteurs, p et q, premiers entre eux, qui se peuvent faire.

V. — *L'équation* $x^2 + y^2 = a^2$.

Si cette équation doit être primitive, elle ne peut être satisfaite que par des valeurs impaires de a, et seulement par celles qui peuvent être écrites comme une somme, divisée par 2, de deux nombres carrés impairs et premiers entre eux, ainsi $a = \frac{p^2 + q^2}{2}$.

On peut désirer savoir quels nombres, a, on pourra décomposer de plusieurs manières, d'après la formule donnée.

Si l'on met $p = 2n + 1$ et $q = 2n + 1$, on aura

$$a = \frac{p^2 + q^2}{2} = 2[n(n + 1) + n_1(n_1 + 1)] + 1 ,$$

et on peut former le tableau suivant des valeurs de a, jusqu'à 200 :

	$n_1 = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 0$	$[\ ] = 0$	2	6	12	20	30	42	56	72	90
$n = 1$	$[\ ] = .$	4	8	14	22	32	44	58	74	92
$n = 2$	$[\ ] = .$	.	12	18	26	36	48	62	78	96
$n = 3$	$[\ ] = .$	.	.	24	32	42	54	68	84	
$n = 4$	$[\ ] = .$	.	.	.	40	50	62	76	92	
$n = 5$	$[\ ] = .$	.	.	.	.	60	72	86		
$n = 6$	$[\ ] = .$	.	.	.	.	.	84	98		
$n = 7$	$[\ ] = .$	.	.	.	.	.	.	(112)		

Les valeurs qui paraissent *plusieurs fois* dans le tableau sont celles qui, pour la même valeur de a, donnent plusieurs valeurs pour x et y. Ainsi le nombre 72, paraissant deux fois, donne

$$a = 2 \cdot 72 + 1 = 145 = \frac{17^2 + 1^2}{2} = \frac{13^2 + 11^2}{2} ,$$

et par conséquent on aura les équations :

$$(1 \cdot 17^2 + \left(\frac{17^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{17^2 + 1^2}{2}\right)^2$$

et

$$(11 \cdot 13)^2 + \left(\frac{13^2 - 11^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{13^2 + 11^2}{2}\right)^2 .$$

Toutefois, on n'oubliera pas que $2n + 1$ et $2n_1 + 1$ doivent toujours être premiers entre eux.

Copenhague, mai 1915.