Application des équations de Brahmagupta-Fermat à l'extraction approchée des racines carrées.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

les conditions, au nombre de deux, d'existence d'un orthocentre, sont :

$$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2 .$$

Conformément à la théorie de l'arithmocercle, il suffira de se donner quatre nombres rationnels a, α, $\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\mu}{2}$, et de poser :

$$b = a \cos\lambda + \alpha \sin\lambda , \qquad c = a \cos\mu + \alpha \sin\mu ,$$

$$\beta = - a \sin\lambda + \alpha \cos\lambda , \qquad \gamma = - a \sin\mu + \alpha \cos\mu ,$$

les quatre nombres rationnels a, α, $\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\mu}{2}$ étant uniquement assujettis aux conditions qui assurent l'existence effective du quadrilatère.

Application des équations de Brahmagupta-Fermat à l'extraction approchée des racines carrées.

32. — Extraction approchée par excès. Je partirai de l'équation considérée par Brahmagupta

$$nx^2 + 1 = y^2 ,$$

n étant le nombre rationnel, positif, non carré dont il s'agit de calculer la racine carrée; t étant un nombre rationnel arbitraire, la solution générale de cette équation est donnée par les formules de Brahmagupta rappelées au § 23 :

$$x = \frac{2t}{n - t^2} , \qquad y = \frac{n + t^2}{n - t^2} .$$

Dans ces conditions, si t est un nombre rationnel suffisamment voisin de $\sqrt{n}$, x et y sont des nombres très grands; tout se passe alors comme si l'équation $nx^2 + 1 = y^2$ se réduisait à $nx^2 = y^2$; de sorte que $\frac{y}{x}$ est une valeur approchée de $\sqrt{n}$ (par excès). Cette valeur approchée de $\sqrt{n}$ est

$$\nu_1 = \frac{n + t^2}{2t} ;$$

l'erreur commise est :

$$\varepsilon_1 = \nu_1 - \sqrt{n} ;$$

on a donc

$$y = x(\varepsilon_1 + \sqrt{n})$$

et, par suite,

$$1 = x^2(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\sqrt{n}) ,$$

de sorte que l'expression

$$\frac{1}{2\sqrt{n}\,x^2} ,$$

où $\sqrt{n}$ est remplacé par une valeur approchée par défaut, représente une limite supérieure de cette erreur ε_1.

33. — Extraction approchée par défaut. L'équation

$$nx^2 - 1 = y^2$$

n'étant résoluble que lorsque n est une somme de deux carrés, on ne peut songer à l'utiliser pour déterminer une valeur approchée par défaut de $\sqrt{n}$. Pour obtenir celle-ci, il y aura lieu d'avoir recours à une équation résoluble quel que soit n ; par exemple, à l'équation

$$nx^2 - \frac{1}{n} = y^2$$

représentative d'une arithmohyperbole passant par l'arithmopoint $x = \frac{1}{n}$, $y = 0$. La méthode générale de résolution des équations de Bragmagupta-Fermat, à partir d'une solution particulière connue *a priori*, conduit actuellement aux formules suivantes de résolution :

$$x = \frac{n + t^2}{n(n - t^2)} , \qquad y = \frac{2t}{n - t^2} .$$

Comme dans le paragraphe précédent, t sera une valeur rationnelle approchée de $\sqrt{n}$; le rapport $\frac{y}{x} = \nu_2$, c'est-à-dire

$$\nu_2 = \frac{2nt}{n + t^2} ,$$

sera une valeur approchée (par défaut) de la racine carrée de n. Pour expression de l'erreur ε_2, on pourrait prendre :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}} x^2} .$$

34. — En résumé, la théorie des équations de Brahmagupta-Fermat conduit à un procédé d'extraction des racines carrées fondé sur les inégalités

$$\frac{2nt}{n+t^2} < \sqrt{n} < \frac{n+t^2}{2t} .$$

Les termes extrêmes ont pour produit n et leur différence est :

$$\frac{n+t^2}{2t} - \frac{2nt}{n+t^2} = \frac{(n-t^2)^2}{2t(n+t^2)} .$$

Cette méthode n'est d'ailleurs pas distincte de celle employée par les géomètres grecs, par ARCHIMÈDE notamment :

Soit, pour fixer les idées, à extraire la racine carrée de $n = 1000$. Ce nombre étant compris entre $\overline{31}^2 = 961$ et $\overline{32}^2 = 1024$, il y aura lieu de prendre $t = 32$, dans une première application des formules précédentes ; on obtient ainsi

$$\frac{8000}{253} = 31{,}620 < \sqrt{1000} < \frac{253}{8} = 31{,}625 ,$$

c'est-à-dire deux décimales exactes dès cette première application.

Une seconde application avec $t = \frac{253}{8}$ donne

$$\frac{4{\cdot}048{\cdot}000}{128{\cdot}009} < \sqrt{1000} < \frac{128{\cdot}009}{408} ,$$

ou encore :

$$31{,}622{\cdot}776{\cdot}3 < \sqrt{1000} < 31{,}622{\cdot}776{\cdot}6 ,$$

c'est-à-dire six décimales exactes.

Une troisième application donne quinze décimales :

$$31{,}622{\cdot}776{\cdot}601{\cdot}683{\cdot}793{\cdot}2 < \sqrt{1000} < 31{,}622{\cdot}776{\cdot}601{\cdot}683{\cdot}793{\cdot}4 .$$