II. — L'équation $x + y^2 = a^2$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Exemple 1. $p + q = \sqrt{z^2 + 4.2.3.5}$.

Les couples de facteurs mentionnés plus haut deviennent:

$$\begin{array}{cccc} 1\,, & 2\,, & 3\,, & 5\,, \\ 2.3.5 & 3.5 & 2.5 & 2.3 \end{array}$$

Si l'équation est primitive et en nombres entiers, il faut avoir $z = 29$, 13, 7 ou 1, et les racines correspondantes $p + q$ seront 31, 17, 13 et 11.

Exemple 2. $\frac{p-q}{2} = \sqrt{z^2 - 3.5.7}$.

Les couples de facteurs sont

$$\begin{array}{cccc} 1\,, & 3\,, & 5\,, & 7\,, \\ 3.5.7 & 1.5.7 & 1.3.7 & 1.3.5 \end{array}$$

Il faut donc qu'on ait $z = 53$, 19, 13 ou 11, et les racines $\frac{p-q}{2}$ deviendront 52, 16, 8 et 4.

Exemple 3. Soit

$$x = \sqrt{1508^2 + 88305} \ ;$$

pour savoir, sans calcul ordinaire, si la racine est rationnelle, il faut examiner si les deux termes sous le signe radical ont un facteur commun. On trouvera le facteur 29; et en outre 88305 étant divisible par 29^2, il s'ensuit

$$x = 29\sqrt{52^2 + 105} \ .$$

Comme 52 est égal à $\frac{105 - 1}{2}$, la racine sera $\frac{105 + 1}{2}$, et ainsi on a

$$x = 29.53 \ .$$

II. — *L'équation* $x + y^2 = a^2$.

A l'aide des équations (I) et (II) on sera à même de déterminer x et y.

Il y aura trois cas différents, selon qu'on a a égal à 1° un nombre premier impair, 2° un nombre impair composé ou 3° un nombre pair composé.

1^er cas. — Selon (I) nous aurons une solution pour chacune des manières différentes de décomposer un nombre, a, en deux nombres, p et q, qui soient premiers entre eux.

Au cas donné, a sera premier avec tous les nombres de 1 à $a - 1$, et il peut ainsi être décomposé en : 1 et $(a - 1)$, 2 et $(a - 2)$, 3 et $(a - 3)$, ... , $\frac{a-1}{2}$ et $\left(a - \frac{a-1}{2}\right)$. *Le nombre des solutions* d'après (I) sera ainsi $\frac{a-1}{2}$.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} 7 = 1 + 6 & \text{donne} & 4.1.6 + 5^2 = 7^2 \\ 2 + 5 & & 4.2.5 + 3^2 = 7^2 \\ 3 + 4 & & 4.3.4 + 1^2 = 7^2\,. \end{array}$$

Suivant l'équation (II), il faut qu'on ait la quantité a décomposée en $\frac{p+q}{2}$, ou $2a$ en $p + q$, où p et q sont tous les deux impairs et premiers entre eux ; ainsi $2a$ peut être décomposé en : 1 et $(2a - 1)$, 3 et $(2a - 3)$, 5 et $(2a - 5)$, ... , $(a - 2)$ et $(a + 2)$.

Le nombre des couples, et par conséquent *des solutions,* devient $n = \frac{a - 2 + 1}{2} = \frac{a-1}{2}$, c'est-à-dire le même que plus haut.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} 2a = 14 = 1 + 13 & \text{donne} & 1.13 + 6^2 = 7^2 \\ 3 + 11 & & 3.11 + 4^2 = 7^2 \\ 5 + 9 & & 5.9 + 2^2 = 7^2\,. \end{array}$$

2^e cas. — Il faut, comme plus haut, connaître les nombres inférieurs à a et premiers avec celui-ci. Du reste, il suffira de connaître la première moitié de ceux-ci.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} a = 15 = 1 + 14 & \text{donne} & 4.1.14 + 13^2 = 15^2 \\ 2 + 13 & & 4.2.13 + 11^2 = 15^2 \\ 4 + 11 & & 4.4.11 + 7^2 = 15^2 \\ 7 + 8 & & 4.7.8 + 1^2 = 15^2\,. \end{array}$$

Le nombre des solutions est donc $\varphi(a) : 2$, $\varphi(a)$ désignant le nombre des entiers inférieurs à a et premiers avec lui.

D'une manière pareille on peut faire usage de l'équation (II), quand on a déterminé la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci.

Ainsi on trouvera pour $a = 15$:

Exemple.

$$\begin{array}{rrcl} 2a = 30 = & 1 + 29 & \text{donne} & 1.29 + 14^2 = 15^2 \\ & 7 + 23 & & 7.23 + 8^2 = 15^2 \\ & 11 + 19 & & 11.19 + 4^2 = 15^2 \\ & 13 + 17 & & 13.17 + 2^2 = 15^2 \,. \end{array}$$

Le nombre des relations est $\varphi(a):2$.

3^e^ cas. — Le nombre donné étant pair, l'équation (I) ne donne aucune équation primitive, et, par conséquent, nous n'aurons *aucune solution*.

Pour avoir des solutions d'après (II), il faut encore connaître la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci. Soit $a = 12$, $2a = 24 = 2^3.3$, on a $\varphi(24) = 2^2(2-1)(3-1) = 8$.

Exemple.

$$\begin{array}{rrcl} 2a = 24 = & 1 + 23 & \text{donne} & 1.23 + 11^2 = 12^2 \\ & 5 + 19 & & 5.29 + 7^2 = 12^2 \\ & 7 + 17 & & 7.17 + 5^2 = 12^2 \\ & 11 + 13 & & 11.13 + 1^2 = 12^2 \,. \end{array}$$

Le nombre des solutions devient $\varphi(2a):2$.

III. — *L'équation* $x + a^2 = y^2$.

Les équations (I) et (II) nous donneront aussi, pour un a donné, des solutions de cette équation. On aura à traiter, comme plus haut, les trois cas différents désignés.

1^er^ cas. — En se servant de l'équation (I), il faut écrire le nombre premier donné, a, comme une différence entre deux nombres impairs et premiers entre eux. Mais cela pourra se faire d'innombrables manières. Les nombres de 1 à $a - 1$ sont premiers avec a, et, par conséquent, on peut les poser pour q, comme nombres à soustraire, dans l'équation $a = p - q$, quand pour p on met $a + q$.