III. — L'équation $x + a^2 = y^2$

D'une manière pareille on peut faire usage de l'équation (II), quand on a déterminé la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci.

Ainsi on trouvera pour $a = 15$:

Exemple.

$$\begin{array}{rrcr}
2a = 30 = & 1 + 29 & \text{donne} & 1.29 + 14^2 = 15^2 \\
& 7 + 23 & & 7.23 + \ \ 8^2 = 15^2 \\
& 11 + 19 & & 11.19 + \ \ 4^2 = 15^2 \\
& 13 + 17 & & 13.17 + \ \ 2^2 = 15^2 \ .
\end{array}$$

Le nombre des relations est $\varphi(a):2$.

3e cas. — Le nombre donné étant pair, l'équation (I) ne donne aucune équation primitive, et, par conséquent, nous n'aurons *aucune solution*.

Pour avoir des solutions d'après (II), il faut encore connaître la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci. Soit $a = 12$, $2a = 24 = 2^3.3$, on a $\varphi(24) = 2^2(2 - 1)(3 - 1) = 8$.

Exemple.

$$\begin{array}{rrcr}
2a = 24 = & 1 + 23 & \text{donne} & 1.23 + 11^2 = 12^2 \\
& 5 + 19 & & 5.29 + \ \ 7^2 = 12^2 \\
& 7 + 17 & & 7.17 + \ \ 5^2 = 12^2 \\
& 11 + 13 & & 11.13 + \ \ 1^2 = 12^2 \ .
\end{array}$$

Le nombre des solutions devient $\varphi(2a):2$.

III. — *L'équation* $x + a^2 = y^2$.

Les équations (I) et (II) nous donneront aussi, pour un a donné, des solutions de cette équation. On aura à traiter, comme plus haut, les trois cas différents désignés.

1er cas. — En se servant de l'équation (I), il faut écrire le nombre premier donné, a, comme une différence entre deux nombres impairs et premiers entre eux. Mais cela pourra se faire d'innombrables manières. Les nombres de 1 à $a - 1$ sont premiers avec a, et, par conséquent, on peut les poser pour q, comme nombres à soustraire, dans l'équation $a = p - q$, quand pour p on met $a + q$.

Exemple.

$a = 7 = 8 - 1$	donne	$4.1.\ 8 + 7^2 = 9^2$
$9 - 2$		$4.2.\ 9 + 7^2 = 11^2$
$10 - 3$		$4.3.10 + 7^2 = 13^2$
$11 - 4$		$4.4.11 + 7^2 = 15^2$
$12 - 5$		$4.5.12 + 7^2 = 17^2$
$13 - 6$		$4.6.13 + 7^2 = 19^2$.

On peut *continuer à l'infini* en ajoutant des multiples de 7. Ainsi nous aurons :

$15 - 8$	donne	$4\text{-}8\text{-}15 + 7^2 = 23^2$
$16 - 9$		$4\text{-}9\text{-}16 + 7^2 = 25^2$
$17 - 10$		$4\text{-}10\text{-}17 + 7^2 = 27^2$
etc.		etc.

Usant de l'équation (II), il nous faut décomposer a en $\frac{p-q}{2}$, ou $2a$ en $p - q$. Pour $a = 7$, $2a = 14$, on doit donc poser pour q les $\varphi(14)$, ou 6, nombres qui sont inférieurs à 14 et premiers avec ce nombre, savoir 1, 3, 5, 9, 11, 13.

Exemple.

$2a = 14 = 15 - 1$	donne	$1.15 + 7^2 = 8^2$
$17 - 3$		$3.17 + 7^2 = 10^2$
$19 - 5$		$5.19 + 7^2 = 12^2$
$23 - 9$		$9.23 + 7^2 = 16^2$
$25 - 11$		$11.25 + 7^2 = 18^2$
$27 - 13$		$13.27 + 7^2 = 20^2$
$29 - 15$		$15.29 + 7^2 = 22^2$
$31 - 17$		$17.31 + 7^2 = 24^2$
$33 - 19$		$19.33 + 7^2 = 26^2$
etc.		etc.

2e *cas.* — Quand on a pour *a un nombre composé impair*, on procède comme plus haut ; il faut, toutefois, commencer par la détermination des nombres qui se trouvent inférieurs à a et premiers avec celui-ci.

3e *cas.* — Ayant pour *a un nombre pair,* l'équation (I) ne donnera aucune solution primitive.

Par contre, l'équation (II) nous donnera *d'innombrables solutions*. Pour $a = 18$, nous avons $2a = 36$, et les $\varphi(36)$, ou 12, nombres inférieurs à 36 et premiers avec lui, sont 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, d'où suit :

Exemple.

$$\begin{array}{rlrcl} 2a = 36 = 37 - 1 & \text{donne} & 1.37 + 18^2 & = & 19^2 \\ 41 - 5 & & 5.41 + 18^2 & = & 23^2 \\ 43 - 7 & & 7.43 + 18^2 & = & 25^2 \\ 47 - 11 & & 11.47 + 18^2 & = & 29^2 \\ \cdots & & \cdots & & \\ \cdots & & \cdots & & \\ \hline 73 - 37 & & 37.73 + 18^2 & = & 55^2 \\ 77 - 41 & & 41.77 + 18^2 & = & 59^2 \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & & \end{array}$$

IV. — *L'équation* $a^2 + x^2 = y^2$.

(« Equation pythagorique »).

Les nombres pythagoriques se laissent déterminer de la plus simple manière à l'aide des équations (I) et (II), si l'on pose, seulement, pour p et q des nombres carrés correspondants, et en employant, *dans le premier terme*, successivement tous les nombres carrés.

Exemple. $4.2^2.3^2.5^2 = 60^2$ donne les couples de facteurs :

$$\frac{1^2}{2^2.3^2.5^2}, \quad \frac{2^2}{3^2.5^2}, \quad \frac{3^2}{2^2.5^2}, \quad \frac{5^2}{2^2.3^2}$$

dont on aura

$$\begin{aligned} 60^2 + 899^2 &= 901^2 \\ 60^2 + 221^2 &= 229^2 \\ 60^2 + 91^2 &= 109^2 \\ 60^2 + 11^2 &= 61^2 . \end{aligned}$$

On trouve toutes les valeurs cherchées, en employant seulement l'équation (II), où successivement on met dans le premier terme tous les nombres *impairs* de toute la suite des nombres. Si a est un nombre composé, il faut le décomposer en ses facteurs premiers, et de ceux-ci on doit former, comme nous l'avons montré dans ce qui précède, tous les couples des facteurs, p et q, premiers entre eux, qui se peuvent faire.

V. — *L'équation* $x^2 + y^2 = a^2$.

Si cette équation doit être primitive, elle ne peut être satisfaite que par des valeurs impaires de a, et seulement