NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

---

1. — J'ai réuni, dans le présent travail, quelques remarques bien simples dont l'ensemble constitue la première étude systématique de la géométrie élémentaire des nombres rationnels. Dans ce premier article, j'ai cru devoir me borner aux seules figures qui sont en étroite connexion avec le cercle ou la sphère, réservant d'autres recherches pour un Mémoire ultérieur qui sera consacré aux arithmoconiques (c'est-à-dire à l'étude géométrique des équations indéterminées du genre de celles de Brahmagupta et Fermat) et aux courbes d'ordre supérieur.

Les arithmotriangles héroniens occupent dans ce travail une place importante. J'ai pensé, en effet, que ces triangles qui possèdent un grand nombre de lignes rationnelles et dont la détermination a jusqu'ici donné lieu à quelques recherches isolées méritaient d'être étudiés d'une manière beaucoup plus approfondie.

Les éléments de l'Arithmogéométrie.

2. — Qu'il s'agisse du plan ou de l'espace, j'appellerai *point rationnel* ou *arithmopoint* tout point dont les coordonnées cartésiennes rectangulaires sont des nombres rationnels. Sur une droite quelconque, il peut y avoir, selon les cas, zéro point rationnel, un point rationnel ou une infinité de points rationnels; c'est ce que prouvent les trois exemples suivants de droites représentées par les équations respectives :

$$x = \pi \ , \qquad x = y\sqrt{2} \ , \qquad x = 3y \ .$$

Dès qu'il existe, sur une droite, un couple d'arithmopoints distincts, il existe une infinité de points de cette nature sur la droite : ce sont les points qui divisent rationnellement, en un rapport arbitraire, le segment défini par les deux premiers points rationnels. Il n'y a d'ailleurs, sur cette même droite, pas d'autre arithmopoint que ceux obtenus par le procédé précédent. Je dirai, dans le cas d'une droite de cette nature, que c'est une *arithmodroite.*

En géométrie plane, l'équation d'une arithmodroite générale est de la forme $ax + by + c = 0$, a, b, c étant des nombres algébriques arbitraires mais rationnels ; cette même arithmodroite peut aussi être représentée par un système de deux équations linéaires à coefficients rationnels.

Parmi les arithmodroites du plan, celles pour lesquelles l'expression $a^2 + b^2$ est le carré d'un nombre rationnel présentent une importance toute spéciale (c. f. le problème des distances rationnelles, § 18). Je les désignerai donc par la dénomination d'*arithmodirigée.* Ces arithmodirigées jouissent de propriétés simples qu'il est utile de mentionner :

La distance de deux arithmopoints quelconques d'une arithmodirigée est mesurée par un nombre rationnel. Réciproquement, *si la distance de deux arithmopoints particuliers d'une arithmodroite est rationnelle, il en est de même de tout autre couple d'arithmopoints de cette arithmodroite, qui est dès lors une arithmodirigée.*

La distance de tout arithmopoint du plan à une arithmodirigée est rationnelle. Réciproquement, *si la distance d'un arithmopoint particulier du plan à une arithmodroite est rationnelle et non nulle, il en est de même de tout arithmopoint du plan et l'arithmodroite considérée est une arithmodirigée.*

Cette propriété place les arithmodirigées parmi les *courbes de direction* du plan qui jouissent, on le sait, de la propriété caractéristique de décomposition en deux équations rationnelles de l'équation de chacune de leurs courbes parallèles. D'après ce qui vient d'être écrit, le lieu des points du plan qui sont à une distance rationnelle donnée d'une arithmodroite se compose de deux droites parallèles dont les deux équations ne se séparent pas en général, sous le point de vue des nombres rationnels. Cette distinction est caractéristique des arithmodirigées.

Les nombres trigonométriques de l'angle formé par deux arithmodirigées sont tous rationnels ; la tangente trigonométrique de la moitié de cet angle est rationnelle. Il en résulte que la représentation la plus générale d'une arithmodirigée est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ,$$

$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ étant un nombre rationnel t, ainsi que la distance ϖ à l'origine O des coordonnées rectangulaires (Ox, Oy) ; on peut encore poser

$$x = u \,.\cos \varphi + a ,$$
$$y = v \,.\sin \varphi + b ,$$

a, b, $\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$ étant des nombres rationnels donnés et u étant un paramètre rationnel.

En ce qui concerne le plan, il y aura sur lui zéro point rationnel, un point rationnel, une infinité de points rationnels alignés (sur une arithmodroite) ou enfin une infinité d'arithmopoints non alignés. Dès qu'il existe, en effet, un couple d'arithmopoints dans un plan, il en existe une infinité : ceux de l'arithmodroite qui joint les deux premiers. S'il existe trois arithmopoints, sommets d'un véritable triangle, il en existe une infinité : ce sont les centres des distances proportionnelles des trois premiers, respectivement affectés de coefficients algébriques rationnels et absolument arbitraires. Je dirai que, dans ce dernier cas, le plan, qui contient une infinité d'arithmodroites, est un *arithmoplan.*

D'une manière générale, j'appellerai *arithmocourbe,* en géométrie plane ou en géométrie spatiale indifféremment, toute courbe qui satisfera aux conditions simultanées suivantes :

a) la courbe est algébrique et unicursale ;

b) les coefficients des polynomes constitutifs des fractions rationnelles qui expriment rationnellement et paramétriquement les coordonnées cartésiennes d'un point courant de cette courbe sont des nombres rationnels.

Dans ces conditions, une arithmocourbe admet une infinité d'arithmopoints : ce sont tous ceux qui correspondent aux valeurs rationnelles des paramètres de représentation. Réciproquement, tout arithmopoint d'une arithmocourbe correspond à une valeur rationnelle du paramètre.

Une surface algébrique sera de même appelée une *arithmosurface* si elle est susceptible d'être représentée par trois fonctions rationnelles de deux paramètres, tous les coefficients étant des nombres rationnels. A chaque couple de valeurs rationnelles de deux paramètres de représentation, correspond un arithmopoint de la surface. Mais il conviendra essentiellement de s'assurer, dans le cas d'une surface, que, réciproquement, les formules adoptées représentent l'arithmopoint le plus général de la surface étudiée. Les exemples (examinés au § 8) de la représentation géographique (représentation impropre) et de la représentation stéréographique (représentation propre) de l'arithmosphère à rayon rationnel montrent suffisamment l'intérêt qu'il y aura à mettre en évidence des représentations propres des arithmosurfaces.

3. — Arithmocercle. Un cercle quelconque peut n'avoir aucun point rationnel, ou bien en posséder un seul, deux ou une infinité. Dès qu'il en possède trois, en effet, il en possède une infinité : c'est alors un cercle que nous nommerons un *arithmocercle*.

L'équation d'un arithmocercle a nécessairement tous les coefficients de son équation rationnels, puisque ces coefficients satisfont à trois équations linéaires rationnelles. *Le centre d'un arithmocercle est donc toujours un arithmopoint du plan :* on pourra l'appeler l'*arithmocentre.* Il est important d'observer, en vue des applications, que, réciproquement, *un cercle à équation rationnelle et qui possède en outre un arithmopoint est nécessairement un arithmocercle.* L'arithmopoint courant d'un tel arithmocercle s'obtient comme intersection de l'arithmocercle avec une arithmodroite quelconque pivotant autour de l'arithmopoint connu a priori.

4. — Arithmocercle a rayon rationnel. Arithmotriangles pythagoriques. La représentation d'un arithmocercle à rayon rationnel est immédiate ; l'équation d'un tel arithmocercle étant

$$x^2 + y^2 = R^2 ,$$

il suffit d'introduire comme paramètre de représentation la tangente trigonométrique de la moitié de l'azimut

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = t$$

et de poser

$$x = R \cos \theta , \qquad y = R \sin \theta ,$$

pour avoir la représentation générale désirée de l'arithmopoint courant de cet arithmocercle :

$$x = \frac{R(1 - t^2)}{1 + t^2} , \qquad y = \frac{2Rt}{1 + t^2} .$$

A cette théorie des arithmocercles à rayon rationnel est intimement liée celle des *arithmotriangles pythagoriques*. Nous désignerons sous cette dernière dénomination ceux des triangles rectangles dont les trois côtés sont mesurés par des nombres rationnels ; ils sont semblables, et dans des rapports rationnels de similitude, aux triangles pythagoriques proprement dits, c'est-à-dire à ceux des triangles rectangles à côtés entiers.

L'arithmotriangle pythagorique est susceptible d'être représenté par un arithmopoint quelconque d'un arithmocercle à rayon rationnel. Les formules de correspondance entre l'hypoténuse a, les cathètes b et c d'un tel arithmotriangle pythagorique et les coordonnées de l'arithmopoint sont

$$a = R , \qquad b = x , \qquad c = y .$$

C'est à cette même considération des arithmocercles à rayon rationnel que se rattache la représentation déjà indiquée au § 2 des arithmodirigées.

5. — Arithmocercle quelconque. Il s'agit de décomposer un nombre rationnel ρ en une somme de carrés de deux

nombres rationnels x et y. Le cas où ρ est lui-même un carré parfait vient d'être traité; tout facteur entier carré de l'un des deux termes de la fraction ρ pouvant être absorbé dans x et y, nous devons nous borner au seul cas où les deux termes de la fraction irréductible ρ sont à facteurs simples.

Les identités

$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \equiv (x_1^2 + y_1^2)\cdot(x_2^2 + y_2^2) ,$$

$$\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2} ,$$

permettent en outre de réduire l'étude de la décomposition en deux carrés d'un nombre rationnel ρ au cas particulier où ρ est entier, puisqu'elles expriment que le produit ou le quotient de deux nombres ρ_1, ρ_2 décomposables en deux carrés sont de la même nature.

Etant donné le nombre rationnel ρ, on devra donc considérer les facteurs premiers de son dénominateur et de son numérateur, après suppression des facteurs qui interviennent au carré. La condition nécessaire et suffisante pour que le cercle considéré soit un arithmocercle est alors la suivante : *aucun de ces facteurs n'est de la forme* 4k — 1.

Supposons donc que les seuls facteurs considérés sont le nombre 2 et des nombres entiers de la forme $4k + 1$. Le cercle est alors un arithmocercle; par tâtonnements et à l'aide d'une table de décomposition des nombres $4k + 1$ en sommes de deux carrés, on déterminera un arithmopoint particulier de cet arithmocercle. *La connaissance d'un arithmopoint particulier entraîne alors celle d'une infinité d'autres arithmopoints*. Soit, en effet, $M_0(x_0, y_0)$ un arithmopoint de l'arithmocercle. Une arithmodroite quelconque issue de cet arithmopoint rencontre à nouveau l'arithmocirconférence en un point M_1 dont les coordonnées sont nécessairement des nombres rationnels. Réciproquement tout arithmopoint de l'arithmocercle, autre que M_0, est susceptible d'être obtenu par ce procédé, car la droite M_0M_1 est une arithmodroite. Pratiquement, les coordonnées de l'arithmopoint connu a priori étant x_0, y_0, les coordonnées courantes d'un arithmopoint de l'arithmocercle sont :

$$x = x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta\ ,$$
$$y = x_0 \sin\theta - y_0 \cos\theta\ ;$$

θ est un azimut dont la tangente trigonométrique de la moitié est un nombre rationnel arbitraire.

C'est ainsi que le cercle représenté par l'équation $x^2 + y^2 = 2$ est nécessairement un arithmocercle, puisqu'il passe par l'arithmopoint $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. La représentation rationnelle de cet arithmocercle est

$$x = \frac{1 + 2\lambda - \lambda^2}{1 + \lambda^2}\ , \qquad y = \frac{-1 + 2\lambda + \lambda^2}{1 + \lambda^2}\ .$$

6. — Arithmotriangles automédians. De même qu'à l'arithmocercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ se rattachent les arithmotriangles pythagoriques, il est possible d'associer diverses classes de triangles particuliers à d'autres arithmocercles. C'est ainsi, en premier lieu, qu'à l'arithmocercle $x^2 + y^2 = 2$ se rattachent les arithmotriangles automédians. Ce sont, par définition, les triangles à côtés rationnels liés par la relation $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Les côtés a, b, c d'un triangle se présentant dans l'ordre $a > b > c$, les médianes sont nécessairement dans l'ordre $m_a < m_b < m_c$. Pour que ces médianes aient des longueurs proportionnelles à celles des côtés, il faut et il suffit que celles-ci soient liées par la relation

$$2b^2 = a^2 + c^2\ ;$$

on a alors :

$$2m_a = \lambda c\ , \qquad 2m_b = \lambda b\ , \qquad 2m_c = \lambda a\ ,$$

avec $\lambda = \sqrt{3}$. En d'autres termes, m_a, m_b, m_c ont alors les longueurs qu'elles auraient respectivement dans trois triangles équilatéraux de côtés c, b et a. La condition d'égale inclinaison de deux médianes sur les côtés correspondants conduit aussi aux mêmes triangles.

Ces triangles tels que $2b^2 = a^2 + c^2$ ont été signalés par

E. Lemoine (A. F. A. S., Toulouse, 1887) et par M. J. Neuberg (*Mathésis,* 1889, question n° 661, pp. 261-264) et étudiés par M. J. Déprez (*Mathésis*, 1903, pp. 196-200, 226-230, 245-248); ils ont été nommés *triangles automédians*. Pour avoir la représentation générale des côtés d'un arithmotriangle automédian, il suffit de poser

$$\begin{cases} a = b(\cos\theta + \sin\theta) , \\ c = b(\cos\theta - \sin\theta) , \end{cases}$$

conformément à la théorie de l'arithmocercle $x^2 + y^2 = 2$, passant par l'arithmopoint (1, 1), et d'introduire le paramètre $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} a = \lambda(1 + 2t - t^2) , \\ b = \lambda(1 + t^2) , \\ c = \lambda(1 - 2t - t^2) ; \end{cases}$$

λ est un paramètre rationnel de similitude; c'est du paramètre t seul que dépend la forme du triangle. Reste à préciser les limites dans lesquelles doit être compris ce dernier paramètre t pour que les trois expressions ci-dessus représentent réellement les côtés d'un triangle. Une discussion simple prouve que l'on doit prendre

$$\lambda > 0 , \qquad \sqrt{3} - 2 < t < 2 - \sqrt{3} ;$$

si t est négatif, l'ordre des côtés est $a < b < c$; si t est positif, l'ordre est inverse. Il est encore possible de présenter la double condition précédente sous la forme suivante, équivalente mais plus expressive :

$$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} .$$

A côté des arithmotriangles automédians, il convient de placer les arithmotriangles satisfaisant à la relation

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{2}{b^2} ,$$

également signalée par M. J. Neuberg. Ces arithmotriangles sont encore liés à l'étude de l'arithmocercle $x^2 + y^2 = 2$; on posera :

$$\begin{cases} a = \dfrac{\lambda}{1 + 2t - t^2} , \\ b = \dfrac{\lambda}{1 + t^2} , \\ c = \dfrac{\lambda}{1 - 2t - t^2} ; \end{cases}$$

ou encore

$$a = \frac{b}{\cos\theta + \sin\theta} , \qquad c = \frac{b}{\cos\theta - \sin\theta} ;$$

la double condition d'existence du triangle est ici :

$$0 < \sin\theta < \frac{\sqrt{3} - 1}{2} .$$

7. — Triangles a médianes orthogonales. L'étude des triangles à côtés rationnels dont deux médianes sont orthogonales est intimement liée à la théorie de l'arithmocercle

$$x^2 + y^2 = 5 .$$

La relation moyennant laquelle, dans un triangle ABC de côtés a, b, c, les médianes issues des sommets A et B sont orthogonales est, en effet,

$$a^2 + b^2 = 5c^2 ,$$

c étant nécessairement le plus petit des trois côtés. Remarquons que l'arithmocercle $x^2 + y^2 = 5$ passant par l'arithmopoint (1, 2) a pour représentation paramétrique

$$x = \cos\theta + 2\sin\theta .$$
$$y = 2\cos\theta - \sin\theta .$$

Il en résulte pour l'arithmotriangle considéré les relations

$$\begin{cases} a = c(\cos\theta + 2\sin\theta) ; \\ b = c(2\cos\theta - \sin\theta) ; \end{cases}$$

la représentation la plus générale de ce triangle est donc:

$$\begin{cases} a = \lambda(1 + 4t - t^2) , \\ b = 2\lambda(1 - t - t^2) , \\ c = \lambda(1 + t^2) , \end{cases}$$

λ et t étant deux paramètres rationnels quelconques; le premier est un paramètre de similitude; c'est du second, t, que dépend la forme du triangle. Une discussion simple prouve que t doit être compris entre les limites 0 et $\frac{1}{3}$.

Pour $t < \sqrt{10} - 3$, l'ordre des côtés est $b > a > c$; pour

$$\sqrt{10} - 3 < t < \frac{1}{3} ,$$

l'ordre des côtés est au contraire $a > b > c$.

8. — Arithmosphère. Il s'agit d'étudier la décomposition d'un nombre rationnel en une somme de trois carrés de nombres rationnels. Un premier cas particulier de cette étude des équations du type $x^2 + y^2 + z^2 = \rho$ est celui où ρ est un carré: c'est le problème des parallélépipèdes rectangles à arêtes et diagonales commensurables. L'équation considérée est alors celle $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ d'une arithmosphère à rayon rationnel. Pour avoir un arithmopoint d'une telle arithmosphère à rayon rationnel, il suffit de considérer un point de la sphère dont les tangentes trigonométriques des demi-longitude et demi-latitude soient rationnelles; les formules de représentation correspondantes sont:

$$x = R \cos\varphi \cos\psi , \qquad y = R \cos\varphi \sin\psi , \qquad z = R \sin\varphi ,$$

$\text{tang}\frac{\varphi}{2}$ et $\text{tang}\frac{\psi}{2}$ étant deux nombres rationnels arbitraires; posant $\text{tang}\frac{\varphi}{2} = u$, $\text{tang}\frac{\psi}{2} = v$, il vient, en effet:

$$x = R.\frac{(1 - u^2)(1 - v^2)}{(1 + u^2)(1 + v^2)} , \qquad y = 2R\frac{v(1 - u^2)}{(1 + u^2)(1 + v^2)} \qquad z = 2R\frac{u}{1 + u^2} .$$

Mais cette représentation paramétrique de la sphère est impropre, en ce sens que si elle fait correspondre à tout couple de valeurs rationnelles de (u, v) un arithmopoint de la sphère, celui-ci n'est pas toutefois l'arithmopoint le plus général de cette arithmosphère. Des formules

$$u = \frac{R \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \qquad v = \frac{uy}{z + u(x - R)},$$

il résulte que la représentation géographique laisse de côté les arithmopoints de la sphère tels que leur distance à la ligne des pôles Oz n'est pas rationnelle. C'est ainsi que l'arithmopoint (1, 2, 2) de l'arithmosphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ est représentée par les valeurs irrationnelles de u et de v.

Pour avoir une représentation propre, il suffit d'avoir recours à la représentation stéréographique de la sphère sur un plan. L'introduction de la transformation stéréographique dans l'étude de cette même question conduit à des formules plus simples et présente, en outre de l'avantage essentiel de permettre de représenter l'arithmopoint le plus général de l'arithmosphère, celui de transformer les courbes algébriques tracées sur elle en des courbes planes particulièrement simples le plus souvent. Prenant, en effet, le point 0, 0, R) pour point de vue et le plan $z = 0$ pour plan de projection, les formules

$$x = R\frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \qquad y = R\frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \qquad z = R\frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1},$$

$$\xi = \frac{x}{R - z}, \qquad \eta = \frac{y}{R - z},$$

expriment les relations entre le point $M(x, y, z)$ de la sphère et son image $\mu(\xi, \eta)$.

Il convient de rappeler ici que E. CATALAN (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, [3], t. 27, 1894), observe que l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2$$

prouve que : *sur la sphère dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

il existe une infinité de points dont les coordonnées sont *rationnelles.* Il est manifeste que l'identité précédente n'est autre précisément que celle,

$$(\xi^2+\eta^2+1)^2 \equiv (\xi^2+\eta^2-1)^2+(2\xi)^2+(2\eta)^2 ,$$

qui résulte des formules précédentes de la représentation stéréographique.

Le cas d'une arithmosphère générale $x^2+y^2+z^2=\rho$ se traite de la même manière que le cas d'un arithmocercle quelconque; on absorbe dans x^2, y^2, z^2 les facteurs carrés de l'un ou l'autre terme de ρ et on ramène l'étude de la question au cas où ρ est entier. Par tâtonnements, on détermine, *si elle existe,* une solution particulière dans ce dernier cas et on en déduit une double infinité d'arithmopoints par l'intersection de la sphère et d'une arithmodroite arbitraire issue de l'arithmopoint connu a priori.

9. — ARITHMOHYPERSPHÈRE : TOUTE HYPERSPHÈRE EST UNE ARITHMOHYPERSPHÈRE. L'extension des considérations précédentes au cas d'une hypersphère appartenant à un espace à plus de trois dimensions s'effectue simplement. Il est utile de l'indiquer, en vue de l'application de la considération des arithmohypersphères à une classe spéciale de quadrilatères inscriptibles intéressants (§ 14).

Soit, dans un espace à n dimensions, une hypersphère représentée par l'équation

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=\mathrm{R}^2$$

R étant un nombre rationnel donné. Les équations

$$\left\{\begin{array}{ll}
x_1 & = \mathrm{R}\sin\theta_1 ,\\
x_2 & = \mathrm{R}\cos\theta_1 . \sin\theta_2 ,\\
x_3 & = \mathrm{R}\cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \sin\theta_3 ,\\
x^4 & = \mathrm{R}\cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 . \sin\theta_4 ,\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1} & = \mathrm{R}\cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 . \cos\theta_4 \ldots \cos\theta_{n-2} . \sin\theta_{n-1} ,\\
x_n & = \mathrm{R}\cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 . \cos\theta_4 \ldots \cos\theta_{n-2} . \cos\theta_{n-1} ,
\end{array}\right.$$

dans lesquelles on introduit des valeurs rationnelles de

$\operatorname{tang}\frac{\theta_1}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\theta_2}{2}$, ... $\operatorname{tang}\frac{\theta_{n-1}}{2}$, représentent un point rationnel de l'hypersphère.

Considérons maintenant le cas d'une hypersphère dont l'équation est encore rationnelle, qui peut donc être réduite à la forme

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n} x_k^2 = \rho\ ,$$

par une simple translation rationnelle d'axes, mais dont le rayon $\sqrt{\rho}$ est un nombre irrationnel. Il est essentiel d'observer qu'alors que le cercle de l'espace à deux dimensions et la sphère de l'espace ordinaire ne sont pas généralement douées d'arithmopoints, même lorsque la rationalité des coefficients de leurs équations respectives est assurée, il en est différemment pour les hypersphères, dès l'espace à quatre dimensions. Il résulte, en effet, du théorème de Bachet (généralisé conformément aux considérations du § 14) qu'*une hypersphère représentée par une équation rationnelle admet toujours un arithmopoint*. Par suite, elle admet une ∞^{n-1} d'arithmopoints; elle est alors une *arithmohypersphère*. Soient $(x_1^0\, x_2^0\, x_3^0 \ldots x_n^0)$ les coordonnées rationnelles du point rationnel M_0 connu *a priori*. Pour obtenir un autre point rationnel, il suffit d'associer à l'équation de l'hypersphère les $n - 1$ équations

$$\frac{x_1 - \overset{0}{x_1}}{a_1} = \frac{x_2 - \overset{0}{x_2}}{a_2} = \frac{x_3 - \overset{0}{x_3}}{a_3} = \ldots = \frac{x_n - \overset{0}{x_n}}{a_n}\ ,$$

d'une hyperdroite passant par le point M_0; les $a_1 \ldots a_n$ sont n nombres rationnels arbitraires. Ceci revient à poser

$$x_1 = a_1\lambda + \overset{0}{x_1}\ , \qquad x_2 = a_2\lambda + \overset{0}{x_2}\ , \ \ldots\ , \ x_n = a_n\lambda + \overset{0}{x_n}\ ;$$

λ est un nombre rationnel défini par la formule

$$\lambda = -2\,\frac{a_1\overset{0}{x_1} + a_2\overset{0}{x_2} + \ldots + a_n\overset{0}{x_n}}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\ .$$

Il est encore possible de présenter la solution de cette même question sous une autre forme, en introduisant les n fonctions $\Theta_1 \ldots \Theta_n$ suivantes et leurs dérivées partielles :

$$\left\{\begin{aligned}
\Theta_1 &= \sin\theta_1 \,, \\
\Theta_2 &= \cos\theta_1 . \sin\theta_2 \,, \\
\Theta_3 &= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \sin\theta_3 \,, \\
\Theta_4 &= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 . \sin\theta_4 \,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Theta_{n-1} &= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 . \cos\theta_4 \ldots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} \,, \\
\Theta_n &= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 . \cos\theta_4 \ldots \cos\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \,;
\end{aligned}\right.$$

les $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}$ sont $n - 1$ paramètres arbitraires. On posera alors :

$$\left\{\begin{aligned}
x_1 &= \overset{0}{x}_n \Theta_1 + \overset{0}{x}_1 \frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta_1} + \overset{0}{x}_2 \frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta_2} + \overset{0}{x}_3 \frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta_3} + \ldots + \overset{0}{x}_{n-1} \frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta_{n-1}} \,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_k &= \overset{0}{x}_n \Theta_k + \overset{0}{x}_1 \frac{\partial\Theta_k}{\partial\theta_1} + \overset{0}{x}_2 \frac{\partial\Theta_k}{\partial\theta_2} + \overset{0}{x}_3 \frac{\partial\Theta_k}{\partial\theta_3} + \ldots + \overset{0}{x}_{n-1} \frac{\partial\Theta_k}{\partial\theta_{n-1}} \,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \overset{0}{x}_n \Theta_n + \overset{0}{x}_1 \frac{\partial\Theta_n}{\partial\theta_1} + \overset{0}{x}_2 \frac{\partial\Theta_n}{\partial\theta_2} + \overset{0}{x}_2 \frac{\partial\Theta_n}{\partial\theta_3} + \ldots + \overset{0}{x}_{n-1} \frac{\partial\Theta_n}{\partial\theta_{n-1}} \,,
\end{aligned}\right.$$

et on introduira naturellement dans ces dernières formules des paramètres rationnels arbitraires $t_1 t_2 \ldots t_{n-1}$ respectivement égaux aux tangentes des arcs moitiés

$$t_1 = \operatorname{tang}\frac{\theta_1}{2} \,, \qquad t_2 = \operatorname{tang}\frac{\theta_2}{2} \,, \ldots , \qquad t_{n-1} = \operatorname{tang}\frac{\theta_{n-1}}{2} \,.$$

Ainsi donc, on peut représenter les coordonnées courantes d'un point rationnel d'une arithmohypersphère par des formules contenant les n indéterminées $(a_1 \ldots a_n)$ sous forme homogène, ou les $n - 1$ indéterminées $t_1 \ldots t_{n-1}$.

Mais tandis que, dans le premier mode de représentation, on obtient l'arithmopoint le plus général de l'arithmosphère, il n'en est nullement de même dans le second cas ; la représentation au moyen des fonctions Θ est impropre, tout de même que la représentation géographique de la sphère ordinaire. Par une légère transformation de la première représentation, il est possible, d'autre part, d'étendre aux hypersphères les propriétés de la représentation stéréographique qui est, elle aussi, une representation propre.

Les arithmotriangles héroniens.

10. — Le problème des arithmotriangles héroniens consiste à déterminer les triangles tels que, les côtés étant rationnels, la surface soit aussi un nombre rationnel. Il résulte de cette définition que, dans tout arithmotriangle héronien, les mesures des divers éléments linéaires (longueurs des côtés, longueurs des hauteurs, rayons des cercles inscrits et ex-inscrits, rayon du cercle circonscrit, segments déterminés sur les côtés par les hauteurs) et enfin la surface et les nombres trigonométriques des angles du triangle sont des nombres rationnels.

La détermination des arithmotriangles héroniens généraux peut être effectuée de diverses manières. Il est d'abord possible de faire dériver leur construction de celle des arithmotriangles rectangles pythagoriques. Etant donnés, en effet, deux arithmotriangles rectangles pythagoriques, on peut, par similitudes convenables, rendre égales deux cathètes appartenant respectivement aux deux triangles rectangles; en juxtaposant ensuite les deux cathètes égales, de manière que les deux autres cathètes soient alignées, on constitue un arithmotriangle héronien acutangle et un arithmotriangle héronien obtusangle, suivant que les deux triangles juxtaposés sont de part et d'autre ou non de la cathète commune.

Une seconde méthode de construction générale des arithmotriangles héroniens résulte de la rationalité du rayon du cercle circonscrit et des nombres trigonométriques de ses angles. Il suffit donc de se donner un premier nombre rationnel R qui sera le rayon du cercle circonscrit, et deux autres nombres y et z, rationnels tous deux et assujettis aux inégalités suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > z > 0\,, \qquad \sqrt{1+z^2} - z > y > z\,;$$

en posant alors :

$$\operatorname{tang} A : 2 = \frac{1 - yz}{y + z}, \qquad \operatorname{tang} B : 2 = y, \qquad \operatorname{tang} C : 2 = z,$$

on obtient un arithmotriangle héronien dont les côtés ont pour expressions :

$$a = 4R \cdot \frac{(y + z)(1 - yz)}{(1 + y^2)(1 + z^2)}; \qquad b = 4R \cdot \frac{y}{1 + y^2}; \qquad c = 4R \cdot \frac{z}{1 + z^2};$$

les inégalités imposées aux nombres rationnels y et z sont celles qui assurent l'ordre suivant des côtés du triangle :

$$a > b > c;$$

cet avantage des formules précédentes, qui permettent d'obtenir tous les arithmotriangles héroniens au moyen de trois nombres rationnels R, y et z, quelconques et uniquement assujettis à des conditions de grandeur, compense largement l'inconvénient qui résulte de la dissymétrie de ces formules.

11. — Arithmotriangles a cotés en progression arithmétique. La méthode qui vient d'être indiquée pour déterminer tous les arithmotriangles héroniens permet de résoudre simplement une question qu'il est tout naturel de se poser. On sait, en effet, que tous les arithmotriangles pythagoriques à côtés en progression arithmétique sont semblables au triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 des harpedonaptes égyptiens et qui fut initialement considéré par Pythagore. C'est d'autre part à un triangle de côtés 13, 14, 15 que *Héron d'Alexandrie* appliqua pour la première fois la formule, par lui découverte, exprimant la surface d'un triangle en fonction des mesures des côtés. Ce même triangle de côtés 13, 14, 15 figure aussi dans l'une des questions posées en 1536 par Zuane di Coi à Tartaglia, l'intérêt de cette question résidant précisément dans le fait que diverses lignes tracées dans le triangle considéré sont mesurées par des nombres rationnels.

Il est donc intéressant de déterminer la formule générale donnant tous les arithmotriangles héroniens à côtés en progression arithmétique. La condition est, pour l'ordre $a > b > c$ des côtés,

$$2b = a + c ;$$

par l'utilisation des formules précédentes, cette condition devient :

$$\frac{2y}{1+y^2} = \frac{3}{1+z^2} + \frac{(y+z)(1-yz)}{(1+y^2)(1+z^2)} ,$$

c'est-à-dire :

$$y = \frac{2z}{1+3z^2} .$$

Les inégalités

$$\sqrt{1+z^2} - z > y > z$$

sont ici satisfaites, sous les seules conditions $\frac{1}{\sqrt{3}} > z > 0$. *Il existe donc une infinité d'arithmotriangles héroniens à côtés en progression arithmétique et dissemblables entre eux.* Ces triangles dépendent du paramètre rationnel arbitraire z, uniquement assujetti à la double condition d'être positif et inférieur à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. — Une troisième méthode de détermination des arithmotriangles héroniens, générale et respectant la symétrie entre les éléments, consiste à rattacher la théorie de ces triangles à celle des arithmocercles. J'observerai, en effet, que la formule bien connue qui donne l'aire d'un triangle en fonction des coordonnées des sommets, sous la forme d'un déterminant, conduit à des triangles dont l'aire est rationnelle si les coordonnées des sommets sont six nombres rationnels. Il reste donc à assurer la rationalité des longueurs des trois côtés d'un tel triangle. En d'autres termes, puisqu'un cercle est un arithmocercle dès qu'il possède trois points rationnels, il faut se donner tout d'abord un arithmocercle quelconque du rayon rationnel, dans le plan. Ce cercle sera, par exemple, défini par son centre O et par un point A quelconque du plan, ces deux points O et A étant tous deux rationnels. Il s'agit maintenant de trouver, parmi l'infinité de points rationnels de la circonférence de cet arithmocercle, un groupe de trois points M_1, M_2 et M_3 dont les mesures des distances mutuelles soient des nombres rationnels.

Supposons que le rayon OA ait été choisi comme origine des arcs sur cette circonférence; les points M_1, M_2 et M_3 seront alors repérés par des arcs θ_1, θ_2 et θ_3. Ces trois points étant rationnels, les tangentes des arcs moitiés seront des nombres rationnels; mais cette triple condition n'assure point la rationalité des mesures des distances mutuelles des trois arithmopoints : il faut aussi que les sinus des moitiés des trois différences de ces arcs pris deux à deux soient des nombres rationnels, c'est-à-dire encore que tous les nombres trigonométriques des arcs $\frac{\theta_1}{2}$, $\frac{\theta_2}{2}$, $\frac{\theta_3}{2}$ soient rationnels. La condition pour qu'il en soit ainsi est que les tangentes des arcs $\frac{\theta_1}{4}$, $\frac{\theta_2}{4}$, $\frac{\theta_3}{4}$ soient rationnelles, et réciproquement d'ailleurs.

Nous arrivons ainsi à la construction définitive de ces arithmotriangles héroniens : *On se donnera un arithmocercle quelconque de rayon rationnel, sur lequel on marquera un point rationnel* A *arbitraire. Cet arithmopoint* A *servant d'origine des arcs, sur la circonférence, on marquera les trois points* M_1, M_2 *et* M_3 *de cette circonférence repérés par trois azimuts* θ_1, θ_2 *et* θ_3 *satisfaisant à l'unique condition que les tangentes trigonométriques de leurs quarts soient des nombres rationnels arbitrairement choisis.*

Les formules symétriques, qui correspondent à ce mode général de construction des triangles héroniens, s'obtiennent aisément. Il suffit de se donner quatre nombres rationnels quelconques R, λ_1, λ_2 et λ_3; le premier, essentiellement positif et différent de zéro, sera le rayon du cercle circonscrit; les trois autres seront les nombres :

$$\lambda_1 = \text{tang}\,\frac{\theta_1}{4}, \qquad \lambda_2 = \text{tang}\,\frac{\theta_2}{4}, \qquad \lambda_3 = \text{tang}\,\frac{\theta_3}{4}.$$

La longueur du côté $M_1 M_2$, par exemple, est

$$\overline{M_1 M_2} = 2R \left| \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right|$$

c'est-à-dire :

$$\overline{M_1M_2} = 4R \cdot \frac{|(\lambda_2 - \lambda_1)(1 + \lambda_1\lambda_2)|}{(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2)} .$$

Les deux autres côtés ont des expressions qui se déduisent de celle-ci par permutations circulaires. Quant aux angles de l'arithmotriangle héronien, ils seront déterminés par des formules telles que les suivantes :

$$\widehat{M_3} = \frac{1}{2}|\theta_2 - \theta_1| , \qquad \operatorname{tang}\frac{M_3}{2} = \left|\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}\right| .$$

Ces considérations permettent d'établir la proposition suivante relative à la déformation continue des arithmotriangles héroniens et à l'existence d'un arithmotriangle héronien aussi voisin qu'on le veut d'un triangle imposé : *Etant donnés trois cercles arbitrairement et indépendamment choisis dans le plan, de rayons aussi petits qu'on le veut, il est toujours possible de trouver trois arithmopoints respectivement intérieurs aux trois cercles imposés et qui soient les sommets d'un arithmotriangle héronien.* En d'autres termes : *Etant donné un triangle quelconque, il existe toujours un arithmotriangle héronien dont les côtés soient aussi voisins qu'on le désire de ceux du triangle imposé.*

Pour établir cette proposition, je supposerai tout d'abord que les centres α_1, α_2, α_3 des trois petits cercles sont trois arithmopoints. Par eux passe une circonférence qui est nécessairement une arithmocirconférence ; elle peut d'ailleurs dégénérer en une arithmodroite. Si le rayon est rationnel, il sera possible de trouver sur cette circonférence trois points repérés par les azimuts θ_1, θ_2 et θ_3 tels que $\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\theta_3}{4}$ soient des nombres rationnels et respectivement aussi rapprochés qu'on le désirera des trois centres des cercles imposés. Les trois points ainsi déterminés seront alors les sommets d'un arithmotriangle héronien satisfaisant à la question.

Si, au contraire, le rayon de l'arithmocercle passant par α_1, α_2, α_3 n'est pas un nombre rationnel, soit ε l'écart minimum imposé entre les centres α_1, α_2, α_3 des trois cercles imposés et les sommets de l'arithmotriangle héronien désiré. Il suffit de substituer au cercle passant par $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ un cercle concentrique à rayon rationnel différent du rayon du précédent de moins de $\frac{1}{2}\varepsilon$; soient alors β_1, β_2, β_3 les points de la nouvelle circonférence qui sont les plus rapprochés de α_1, α_2, α_3. Sur cet arithmocercle de rayon rationnel, on pourra toujours trouver trois arithmopoints repérés par des azimuts dont les tangentes des quarts soient rationnelles et tels que l'on ait :

$$\overline{M_1\beta_1} < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \overline{M_2\beta_2} < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \overline{M_3\beta_3} < \frac{\varepsilon}{2}\ ;$$

ces trois points $M_1 M_2 M_3$ sont alors respectivement situés à des distances de $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ inférieures à ε ; de sorte que l'arithmotriangle héronien $M_1 M_2 M_3$ répond à la question.

Reste enfin le cas où les trois centres α_1, α_2, α_3 des trois cercles imposés ne sont pas des arithmopoints. Il suffira de leur substituer trois arithmopoints α'_1, α'_2, α'_3 respectivement intérieurs aux cercles imposés. De ces points $\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3$ comme centres, on décrira trois cercles respectivement intérieurs aux trois premiers et à rayons rationnels. Le problème, étant possible pour l'ensemble de ces derniers trois cercles, le sera *a fortiori* pour les cercles primitivement donnés.

Arithmotriangles héroniens particuliers.

13. — Il est possible de rattacher, de deux manières distinctes, les arithmotriangles héroniens particuliers, tels que les quatre facteurs p, $p - a$, $p - b$ et $p - c$ qui figurent dans l'expression classique

$$S^2 = p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)\ ,$$

du carré de la surface d'un triangle de côtés a, b et c soient les carrés de quatre nombres rationnels, à la théorie des points rationnels de l'arithmosphère.

Première représentation de ces triangles héroniens. Posons, en mettant en évidence les racines supposées rationnelles des segments déterminés sur les côtés par les points de contact avec le cercle inscrit :

$$p = R^2 , \quad p - a = x^2 , \quad p - b = y^2 , \quad p - c = z^2 ;$$

R, x, y, z sont quatre nombres rationnels positifs, par hypothèse, évidemment reliés par la relation unique :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Tout arithmotriangle héronien de l'espèce envisagée est donc associable à un point rationnel de la partie, située dans le trièdre des directions positives des axes coordonnés, d'une arithmosphère de centre O *et de rayon rationnel.*

Par une projection stéréographique, *il est donc possible d'établir une correspondance entre tout point rationnel du plan et un arithmotriangle héronien de l'espèce considérée.*

Les formules de représentation de ces arithmotriangles héroniens sont, en fonction des coordonnées ξ et η du point image du plan $\omega\xi\eta$:

$$a = R^2 \frac{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} = R^2 \frac{[\eta^2 + (\xi + 1)^2][\eta^2 + (\xi - 1)^2]}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} ,$$

$$b = R^2 . \frac{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} = R^2 . \frac{[\xi^2 + (\eta + 1)^2][\xi^2 + (\eta - 1)^2]}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} ,$$

$$c = 4R^2 . \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} ,$$

De ces formules résultent les suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} a - b &= 4R^2 \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} , \\ b - c &= R^2 . \frac{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 - 4\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} , \\ a - c &= R^2 \frac{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 - 4\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} ; \end{aligned} \right.$$

elles permettent de discuter l'ordre de grandeur des côtés du triangle héronien d'après la position du point image dans le plan $\omega\xi\eta$. Les régions correspondantes aux divers cas possibles sont séparées les unes des autres par des courbes très simples : deux droites $\eta + \xi = 0$ et $\eta - \xi = 0$, et quatre circonférences :

$$\xi^2 + \eta^2 + 2\eta - 1 = 0\,, \qquad \xi^2 + \eta^2 - 2\eta - 1 = 0\,,$$
$$\xi^2 + \eta^2 + 2\xi - 1 = 0\,, \qquad \xi^2 + \eta^2 - 2\xi - 1 = 0\,.$$

14. — *Extension à certains arithmoquadrilatères inscriptibles.* Aux arithmotriangles héroniens qui viennent d'être déterminés se rattachent des quadrilatères inscriptibles à surface rationnelle qui méritent d'être mentionnés ici.

Observons que la surface d'un quadrilatère plan, inscriptible dans un cercle, est exprimée par la formule

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,,$$

en fonction des côtés a, b, c, d. Il y a lieu de considérer, au titre de généralisation des arithmotriangles précédents, ceux des quadrilatères inscriptibles tels que les quatre facteurs $p - a$, $p - b$, $p - c$, $p - d$ soient simultanément carrés parfaits. Posant

$$p - a = x^2\,, \qquad p - b = y^2\,, \qquad p - c = z^2\,, \qquad p - d = t^2\,,$$

on aura :

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2p\,.$$

Dans ces conditions, donnons-nous un périmètre arbitraire $2p$ et observons que le théorème de Bachet est susceptible d'être étendu aux nombres rationnels. Le théorème de Bachet proprement dit consiste dans le fait que tout nombre entier N est de la forme en nombres entiers :

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2\,;$$

il en résulte que l'inverse d'un entier est de la même forme en nombres rationnels, en vertu de l'expression suivante de $\frac{1}{N}$:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}\right)^2\,;$$

on sait enfin que le produit de deux expressions algébriques sommes de quatre carrés est lui aussi somme de quatre carrés. Tout nombre rationnel est donc décomposable en une somme de quatre carrés de nombres rationnels, cette décomposition résultant de celles des divers facteurs qui figurent aux deux termes du nombre rationnel considéré.

Nous supposons donc le périmètre $2p$ ainsi décomposé en une somme de quatre carrés de nombres rationnels ; de cette décomposition particulière il est aisé de déduire une décomposition générale, car nous nous trouvons en présence d'une arithmohypersphère de l'espace à quatre dimensions dont un arithmopoint particulier est connu et à laquelle il suffit d'appliquer les formules du § 9.

Il existe donc une infinité de quadrilatères inscriptibles de l'espèce considérée, admettant un périmètre arbitrairement imposé et dont la détermination s'effectue à l'aide du théorème de Bachet et de la considération d'une arithmohypersphère (avec trois paramètres arbitraires, en plus du périmètre).

15. — *Deuxième méthode de détermination de ces triangles. Leur construction géométrique.* Donnons-nous un triangle ABC, dans le plan de comparaison ; ce triangle est quelconque, ses côtés a, b, c étant supposés toutefois mesurés par des nombres rationnels. Il existe un système de trois sphères, juxtaposées sur un plan horizontal qui leur est tangent en A, B et C. Soient α, β, γ leurs centres respectifs ; leurs rayons sont définis par des formules :

$$R_\alpha = \frac{bc}{2a}, \qquad R_\beta = \frac{ca}{2b}, \qquad R_\gamma = \frac{ab}{2c};$$

c'est-à-dire encore

$$R_\alpha = \frac{2abc}{4a^2}, \qquad R_\beta = \frac{2abc}{4b^2}, \qquad R_\gamma = \frac{2abc}{4c^2}.$$

Le produit $2abc$ est ou non le carré d'un nombre rationnel. En tous cas, une similitude permet de transformer le triangle ABC en un triangle tel que $2abc$ soit carré d'un nombre rationnel : si l'on pose, en effet, $a_1 = \lambda a \quad b_1 = \lambda b \quad c_1 = \lambda c$, on a

$$2a_1 b_1 c_1 = 2abc \, . \, \lambda^3 \ ;$$

il suffit de prendre

$$\lambda = \frac{k^2}{2abc} \ ,$$

k étant un nombre rationnel arbitraire, pour obtenir un triangle semblable à ABC et tel que le produit $2a_1 b_1 c_1$ soit carré. Je supposerai dorénavant que cette opération préliminaire a été effectuée. De ce fait, les rayons des trois sphères sont trois carrés de nombres rationnels. Le triangle $\alpha\beta\gamma$ des trois centres des sphères considérées est donc tel que les six segments, deux à deux égaux, déterminés sur ses côtés par les points de contact avec le cercle inscrit sont les carrés de nombres rationnels. Pour qu'un tel triangle $\alpha\beta\gamma$ soit de l'espèce que j'étudie actuellement, il faut et il suffit, en outre, que son demi-périmètre soit lui aussi carré d'un nombre rationnel ; l'expression

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \ ,$$

et, par suite, la somme des carrés des trois hauteurs du triangle ABC doivent être les carrés de deux nombres rationnels. D'où la construction suivante :

On considérera un point quelconque rationnel de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ ,$$

tel que ses trois coordonnées puissent être considérées comme les trois hauteurs d'un triangle ; parmi les triangles semblables à celui-ci, on en choisira un ABC *à côtés rationnels et dont le double produit de ces côtés soit le carré d'un nombre rationnel. Le triangle des trois centres des sphères tangentes deux à deux et toutes trois tangentes au plan du triangle* ABC *en ses sommets respectifs sera un arithmotriangle héronien de l'espèce actuellement envisagée.*

La construction géométrique des trois sphères est des plus simples ; il suffit d'effectuer une inversion dont le pôle soit un sommet, A par exemple ; les sommets B et C deviennent deux points B′ et C′. On construit alors immédiatement deux sphères tangentes entre elles, et toutes deux tangentes respectivement en B′ et C′ au plan de comparaison. Par la même inversion, le système constitué par ces deux nouvelles sphères et par leur plan tangent commun horizontal, autre que le plan de comparaison, se transforme en les trois sphères désirées.

Il reste à discuter la possibilité de la construction du triangle ABC défini par ses trois hauteurs, construction qui se ramène immédiatement à celle d'un triangle connaissant les trois côtés. Je supposerai que l'ordre imposé aux côtés a, b, c soit : $a < b < c$; que x, y, z soient respectivement les inverses de a, b, c et enfin que les relations entre la sphère et sa représentation stéréographique soient exprimées par les formules :

$$x = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad y = \frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad z = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1} ;$$

on doit donc discuter les inégalités :

$$x > y > z > 0, \quad c < a + b \quad \text{ou} \quad \frac{1}{z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

qui donnent :

$$\xi > 0, \quad \eta > 0, \quad \xi > \eta, \quad 2\eta > \xi^2 + \eta^2 - 1 > 0,$$
$$2\xi\eta < (\xi + \eta)(\xi^2 + \eta^2 - 1) ;$$

finalement, l'image (ξ, η) du point de la sphère doit être intérieure à un certain triangle mixtiligne $\alpha\beta\gamma$, ayant pour sommets le point $\alpha(\xi = 1, \eta = 0)$, le point $\beta\left(\xi = \eta = \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ et le point $\gamma(1, 1)$; ses côtés sont un segment $\beta\gamma$ de la bissectrice $\xi = \eta$, un arc de cercle $\alpha\beta$ et enfin un arc $\alpha\gamma$ de la cubique circulaire représentée par l'équation

$$(\xi + \eta)(\xi^2 + \eta^2 - 1) - 2\xi\eta = 0,$$

16. — Les côtés a, b, c d'un triangle de l'espèce qui vient d'être considérée dans les paragraphes précédents, c'est-à-dire tels que p, $p - a$, $p - b$, $p - c$ soient des carrés parfaits étant reliés à un point (x, y, z) de la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

par les formules

$$a = R^2 - x^2 , \qquad b = R^2 - y^2 , \qquad c = R^2 - z^2 ,$$

la condition

$$2b = a + c$$

moyennant laquelle ces côtés seraient en progression arithmétique devient :

$$2y^2 = x^2 + z^2 ;$$

elle peut être écrite sous la forme équivalente :

$$3y^2 = R^2 .$$

De l'impossibilité de cette dernière équation, il résulte donc qu'*il n'existe aucun triangle de l'espèce considérée dont les côtés soient en progression arithmétique.*

Voici encore une curieuse proposition négative concernant ces mêmes triangles. La condition pour que le triangle de côtés a, b, c soit rectangle,

$$a^2 + b^2 = c^2 ,$$

devient ici

$$Rz = xy ;$$

la quartique gauche intersection du paraboloïde hyperbolique représenté par cette équation et de la sphère $x^2+y^2+z^2 = R^2$ a pour image, dans une projection stéréographique, une quartique plane d'équation :

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 1 = 4\xi\eta .$$

La surface d'un triangle de la même nature est :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = Rxyz = R^4 . \frac{4\xi\eta(\xi^2 + \eta^2 - 1)}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^3} ;$$

cette surface sera mesurée par un carré parfait si le nombre

$$\xi\eta[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 1]$$

est un carré. Il résulte de ces deux remarques que, si un triangle de l'espèce considérée était rectangle, sa surface serait mesurée par un carré parfait, ce qui serait contraire à un théorème de Fermat sur les triangles pythagoriques. Par suite :

Aucun triangle de l'espèce considérée ne saurait être un triangle rectangle.

Le problème des distances rationnelles.

17. — D'une façon générale, étant donnés, dans le plan ou dans l'espace, une arithmocourbe (C) et un arithmopoint A, j'appellerai problème des distances rationnelles relatif à cette arithmocourbe et à l'arithmopoint donné le problème suivant: déterminer parmi les arithmopoints de l'arithmocourbe (C) ceux qui sont situés à une distance rationnelle de l'arithmopoint.

Tout d'abord, il y a lieu de se rendre compte de la réduction du problème des distances rationnelles à l'étude arithmogéométrique d'une autre courbe plane. Soient, en effet, les expressions rationnelles en fonction d'un paramètre t,

$$x = x(t)\ , \qquad y = y(t)\ , \qquad z = z(t)\ ,$$

des coordonnées de l'arithmopoint courant M de l'arithmocourbe (C); soient d'autre part a, b, c les coordonnées rationnelles de l'arithmopoint imposé A. Les axes coordonnés étant essentiellement rectangulaires, on posera :

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = [f(t)]^2 . g(t)$$

$f(t)$ et $g(t)$ étant des fonctions rationnelles de t ; la seconde, $g(t)$, ne contient aucun facteur carré. De cette expression, il résulte que le problème des distances rationnelles équivaut, dans le cas le plus général, à la recherche des arithmopoints de la courbe représentée par l'équation $\mathrm{Y}^2 = g(\mathrm{X})$.

18. — *Le problème des distances rationnelles pour une* *arithmodroite.* L'arithmodroite considérée sera supposée représentée par les équations

$$x = At + A' , \quad y = Bt + B' ;$$

de l'expression de $\overline{AM}^2$,

$$\overline{AM}^2 = (At + A' - a)^2 + (Bt + B' - b)^2 ,$$

il résulte que la question est réductible à l'étude arithmogéométrique de l'hyperbole représentée par l'équation :

$$Y^2 = (A^2 + B^2)X^2 + 2[A(A' - a) + B(B' - b)]X + (A' - a)^2 + (B' - b)^2 .$$

Une première conséquence de cette réductibilité à l'étude arithmogéométrique d'une conique est que *si, dans le cas d'une arithmodroite, le problème des distances rationnelles pour un arithmopoint donné admet une solution particulière, il en admet une infinité.*

Lorsque l'arithmodroite imposée est une de celles que j'ai nommées *des arithmodirigées,* la distance de tout point rationnel du plan à une telle droite est toujours rationnelle et cette propriété est caractéristique des arithmodirigées. Il résulte de cette remarque que, dans le cas d'une arithmodirigée, le problème des distances rationnelles admet toujours une solution particulière : la projection de l'arithmopoint A donné sur l'arithmodirigée, projection qui est nécessairement un arithmopoint. D'après ce qui précède, le *problème des distances rationnelles relatif à une arithmodirigée et à un arithmopoint quelconque est donc toujours possible et admet une infinité de solutions.*

19. — Le problème des distances rationnelles pour une arithmodirigée et un arithmopoint pris sur elle est évidemment résolu par tous les arithmopoints de l'arithmodirigée. Cette propriété s'étend à d'autres arithmocourbes.

Soit, en effet, un arithmopoint imposé de coordonnées (x_0, y_0) ; le problème des distances rationnelles pour cet arithmopoint et une arithmocourbe plane sera résolu par tous les arithmopoints de cette arithmocourbe, si l'expression $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ est le carré d'une expression rationnelle du paramètre rationnel t qui repère l'arithmopoint courant de l'arithmocourbe. On devra donc avoir :

$$\begin{cases} x = x_0 + (1 - t^2) \cdot f(t) , \\ y = y_0 + 2t \cdot f(t) ; \end{cases}$$

ces formules dans lesquelles $f(t)$ est une fonction rationnelle quelconque de t représentent l'arithmocourbe du plan la plus générale qui jouisse de la propriété spécifiée.

L'arithmopoint imposé étant pris pour pôle, l'équation polaire d'une telle courbe est de la forme générale

$$r = f\left(\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}\right)$$

f étant une fonction rationnelle arbitraire de $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$. La strophoïde, les coniques rapportées à un foyer en sont les exemples les plus simples. *Les arithmoconiques sont d'ailleurs doublement solution de la question,* en raison de l'existence de deux foyers, *lorsque ces deux foyers sont deux arithmopoints.*

20. — *Application du problème des distances rationnelles aux arithmotriangles héroniens.* Donnons-nous arbitrairement, dans le plan, une arithmodirigée (D) et un arithmopoint A ; soient alors B et C deux arithmopoints quelconques de (D), uniquement assujettis à la condition d'appartenir aux solutions, en nombre infini, du problème des distances rationnelles relatif à (D) et à A. La distance BC est rationnelle ; de même AB et AC sont mesurées par des nombres rationnels, aux titres de solutions du problème des distances rationnelles ; de sorte que le triangle ABC a ses trois côtés rationnels ; la hauteur issue de A est en outre rationnelle, comme distance d'un arithmopoint à une arithmodirigée. D'où il résulte que le triangle ABC est un arithmotriangle héronien.

Cette méthode de génération des arithmotriangles héroniens est susceptible d'être présentée sous une nouvelle forme, en partant de cette remarque que AB et AC sont des arithmodirigées. Considérons d'une manière générale trois arithmodirigées quelconques ; elles constituent un triangle dont les sommets sont trois arithmopoints ; les côtés et les hauteurs de ce triangle sont, d'après les propriétés fondamentales des arithmodirigées, mesurées par des nombres rationnels. D'où il résulte que *trois arithmodirigées quelconques du plan définissent toujours un arithmotriangle héronien.*

La représentation analytique générale suivante des arithmotriangles héroniens du plan résulte immédiatement de cette proposition. Il suffit de prendre pour équations des côtés du triangle les trois équations suivantes :

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 = p_1 \ ,$$

$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 = p_2 \ ,$$

$$x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 = p_3 \ ;$$

dans ces trois équations, p_1, p_2, p_3, sont trois nobresm rationnels; les azimuts α_1, α_2, α_3 sont quelconques, mais tels que tang $\frac{\alpha_1}{2}$, tang $\frac{\alpha_2}{2}$ et tang $\frac{\alpha_3}{2}$ sont eux aussi des nombres rationnels.

Le 20 septembre 1915.