# I. — Une fonction des angles.

# SUR QUELQUES FONCTIONS DES COTÉS ET DES ANGLES D'UN TRIANGLE

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

## I. — *Une fonction des angles.*

Soient $a$, $b$, $c$ les côtés d'un triangle, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles qui leur sont opposés. Envisageons la fonction des angles

$$(1) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma}}{\sin\alpha + \sin\beta} .$$

En posant pour abréger

$$\sin\alpha = \xi , \qquad \sin\beta = \eta ,$$

l'identité

$$2\xi\eta = (\xi + \eta)^2 - (\xi^2 + \eta^2)$$

transforme l'expression (1) en

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\lambda(1 + \cos\gamma) - \cos\gamma} ,$$

où

$$\lambda = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi + \eta)^2} .$$

Or, l'inégalité et l'identité

$$1 \geqq \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi + \eta)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}\right)^2$$

montrent que

$$\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq 1 ,$$

la limite inférieure $\frac{1}{2}$ étant atteinte pour $\xi = \eta$ et la limite supérieure 1 lorsque l'une des valeurs $\xi$ et $\eta$ est négligeable par rapport à l'autre.

On en conclut

$$\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2} - \cos\gamma} \leqq \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 1 ,$$

ou encore

$$\cos\frac{\pi-\gamma}{2} \leqq \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 1 .$$

Par suite

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1+\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2} \pm \delta ,$$

avec

$$\delta \leqq \frac{1-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2} ,$$

ou bien encore

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos\frac{2\pi-\gamma}{4} \pm \delta , \tag{2}$$

avec

$$\delta \leqq \sin\frac{\pi-\gamma}{4} . \tag{3}$$

L'égalité (3) aura lieu : 1° pour $\xi = \eta$ ; 2° lorsque l'une ou l'autre des quantités $\xi$ et $\eta$ devient négligeable par rapport à l'autre. Au premier cas correspond

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} - \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = \cos\frac{\pi-\gamma}{2}$$

et au second

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} + \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = 1 .$$

*On en conclut que*

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4}(1\pm\varepsilon) \tag{4}$$

*où l'erreur relative* $\varepsilon$ *ne surpasse jamais la grandeur* $\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\gamma}{4}$ ;

*cette erreur est nulle pour le cas où* $\alpha = \beta$, *et atteint son maximum* $\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\gamma}{4}$ *lorsque l'un des deux angles* $\alpha$ *et* $\beta$ *tend vers zéro.*

La proposition présente un intérêt particulier pour les triangles à angle $\gamma$ *obtus.* Dans ce cas *en prenant pour* $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ *la valeur* $\cos^2\frac{\pi-\gamma}{4}$ *l'erreur relative commise* $\varepsilon$ *n'atteint jamais la valeur*

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} = 0{,}171$$

*et cette erreur décroît rapidement lorsque l'angle* $\gamma$ *s'approche de 180°.*

Ainsi, l'on a

$$\text{(5)}\qquad \begin{array}{lll} \text{pour} & \gamma > 120^\circ & \varepsilon < 0{,}070 \\ & \gamma > 140^\circ & \varepsilon < 0{,}040 \\ & \gamma > 150^\circ & \varepsilon < 0{,}018 \\ & \gamma > 160^\circ & \varepsilon < 0{,}007 \\ & \gamma > 170^\circ & \varepsilon < 0{,}002 \\ & \gamma > 175^\circ & \varepsilon < 0{,}0003\ . \end{array}$$

Les triangles pour lesquels l'erreur relative $\varepsilon$ est, en valeur absolue, plus petite qu'une valeur $\varepsilon'$ donnée à l'avance, sont ceux pour lesquels l'angle $\gamma$, exprimé en parties de $\pi$, est plus grand que la différence

$$\pi - 4\operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon'}\ ,$$

où, pour $\varepsilon'$ suffisamment petit

$$\gamma < \pi - 4\sqrt{\varepsilon'}\ .$$

A l'aide de ce qui précède on peut, par exemple, calculer, avec une approximation connue à l'avance, *le troisième côté d'un triangle dont on ne connaît que la somme* a + b *de deux côtés et l'angle obtus* $\gamma$ *qu'ils forment entre eux.*

En effet, désignons par $h$ la somme donnée; des

$$a + b = h\ , \qquad \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

on tire

$$a = h\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}, \qquad b = h\frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

et par suite

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma} = h\varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

*Il s'ensuit que*

$$c = (a + b)\cos^2\frac{\pi - \gamma}{4}(1 \pm \varepsilon), \tag{6}$$

*où l'erreur relative* $\varepsilon$ *est celle commise sur la fonction* $\varphi$ *qu'on vient d'étudier.*

En prenant

$$c = (a + b)\cos^2\frac{\pi - \gamma}{4} \tag{7}$$

on commet une erreur relative qui pour les angles $\gamma$ supérieurs à 140° n'atteindra pas 4 %, pour les angles supérieurs à 150° 1,8 %, pour les angles supérieurs à 160° 0,7 %, pour les angles supérieurs à 170° 0,2 %, etc.

## II. — *Une fonction des côtés.*

L'identité

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$$

écrite sous la forme

$$1 \geqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} = \frac{1}{3} + \frac{(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2}{3(a + b + c)^2} \tag{8}$$

montre que, $a$, $b$, $c$ étant des quantités positives, dont une ou deux peuvent être nulles, la valeur du rapport

$$\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c} \tag{9}$$

est toujours comprise entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et 1, la limite inférieure $\frac{1}{\sqrt{3}}$ étant atteinte pour $a = b = c$ et la limite supérieure 1 étant