**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 18 (1916)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR QUELQUES FONCTIONS DES COTÉS ET DES ANGLES D'UN TRIANGLE

**Autor:** Petrovitch, Michel

**Kapitel:** III.— Fonctions symétriques des côtés ou des angles.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-16875

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

façon que leurs accroissements infiniment petits simultanés sont à chaque instant susceptibles de former un triangle.

*La longueur de l'arc sera égale à la somme des accroissements finis des coordonnées, correspondant au passage d'une extrémité de l'arc à l'autre, multipliée par un coefficient numérique toujours compris entre* 0,5774... *et* 0,7071...

Lorsque, par exemple, les équations de la courbe sont

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

les conditions précédentes qui sont

$$0 \leqq dy - dx \leqq dz \leqq dy + dx$$

(ou bien celles qu'on aurait en intervertissant $x$, $y$, $z$), se résument en inégalités suivantes devant être vérifiées pour tous les points de la courbe sur l'arc considéré :

$$(19) \qquad O \leqq \frac{P - T}{T} \leqq \frac{Q}{T} \leqq \frac{P + T}{T}$$

où

$$(20) \qquad P = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix}, \qquad Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad T = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

## III. — *Fonctions symétriques des côtés ou des angles.*

Soit $f(x)$ une fonction de $x$ développable, au voisinage de $x = 0$, en séries de puissances

$$(21) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

chaque coefficient $a_i$ étant positif ou nul, les deux premiers coefficients $a_0$ et $a_1$ pouvant d'ailleurs être réels quelconques.

Partons du fait suivant facile à démontrer : la valeur du rapport

$$(22) \qquad \frac{(x + y + z)^p}{x^p + y^p + z^p},$$

où $x$, $y$, $z$, $p$ sont des quantités positives, est toujours com-

prise entre 1 et $3^{p-1}$; la limite 1 est atteinte lorsque $p = 1$ ou lorsque deux des quantités $x$, $y$, $z$ sont négligeables par rapport à la troisième; la limite $3^{p-1}$ est atteinte lorsque $x = y = z$.

On tire pour $p = 2, 3, 4 \ldots$

$$a_k(x + y + z)^k \geqq a_k(x^k + y^k + z^k) \,, \tag{23}$$

$$a_k(x + y + z)^k \leqq \frac{a_k}{3}[(3x)^k + (3y)^k + (3z)^k] \,. \tag{24}$$

$$(k = 2, 3, 4 \ldots)$$

En supposant la somme $x + y + z$ plus petite que le rayon de convergence de la série (21), de (23) on tire

$$f(x) + f(y) + f(z) \leqq f(x + y + z) + 2f(0) \,, \tag{25}$$

et de (24), en y remplaçant $3x$, $3y$, $3z$ par $x$, $y$, $z$, on tire d'abord

$$a_k\left(\frac{x + y + z}{3}\right)^k \leqq \frac{a_k}{3}(x^k + y^k + z^k)$$

et à l'aide de ceci

$$f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) \leqq \frac{1}{3}[f(x) + f(y) + f(z)] \,,$$

ou encore

$$f(x) + f(y) + f(z) \geqq 3f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) \,. \tag{26}$$

On a ainsi la double inégalité

$$3f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) \leqq f(x) + f(y) + f(z) \leqq f(x + y + z) + 2f(0) \,, \tag{27}$$

qui se laisse exprimer par l'égalité

$$f(x) + f(y) + f(z) = \mathrm{F}(x + y + z) + \theta\Phi(x + y + z) \,, \tag{28}$$

où

$$\mathrm{F}(t) = 3f\left(\frac{t}{3}\right) \,, \qquad \Phi(t) = f(t) - 3f\left(\frac{t}{3}\right) + 2f(0) \,, \tag{29}$$

et où $\theta$ désigne un coefficient compris entre 0 et 1. Ces deux limites 0 et 1 sont atteintes pour une fonction $f(t)$ arbitraire

lorsque deux des quantités $x$, $y$, $z$ tendent vers zéro ($\theta = 1$), ou bien lorsque $x = y = z$ ($\theta = 0$).

Appliquons maintenant la proposition aux deux cas suivants :

*Premier cas :* x, y, z *sont les trois côtés d'un triangle.* En désignant par $s$ le périmètre du triangle, la formule (28) fournit

$$f(a) + f(b) + f(c) = F(s) + \theta\Phi(s) , \tag{30}$$

F et $\Phi$ étant les deux fonctions (29). La limite inférieure $\theta = 0$ est atteinte pour le triangle isocèle ; la limite supérieure $\theta = 1$ n'est jamais atteinte.

*Deuxième cas :* x, y, z *sont les trois angles d'un triangle exprimés en parties de* $\pi$. La formule (28) fournit

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = F(\pi) + \theta\Phi(\pi) , \tag{31}$$

F et $\Phi$ étant les deux fonctions (29). La limite inférieure $\theta = 0$ est atteinte pour le triangle isocèle et la limite supérieure $\theta = 1$ pour le triangle équilatère à un angle obtus voisin de $\pi$.

*Les formules* (30) *et* (31) *fournissent des expressions remarquables des fonctions symétriques des côtés ou des angles d'un triangle.*

Rappelons que ces formules supposent la fonction $f(t)$ développable, au voisinage de $t = 0$, en série de puissances

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots , \tag{32}$$

où chaque coefficient $a_i$ est positif ou nul, les deux premiers coefficients $a_0$ et $a_1$ pouvant être réels quelconques. De plus la formule (30) suppose la convergence de la série (32) pour $t = s$ et la formule (31) la convergence de la série $t = \pi$.

En prenant, par exemple,

$$f(t) = e^t ,$$

on trouve pour un triangle quelconque

$$e^\alpha + e^\beta + e^\gamma = M + \theta N ,$$

où M et N sont deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$M = 3e^{\frac{\pi}{3}} = 8{,}548\,96\ldots, \qquad N = 2 + e^{\pi} - 3e^{\frac{\pi}{3}} = 16{,}591\,34\ldots$$

Nous remarquerons en terminant que les formules (27) et (28) ne sont qu'un cas particulier d'un théorème général exprimant la relation entre la moyenne arithmétique d'un nombre quelconque de quantités positives, et une fonction symétrique arbitraire de ces quantités, qui sera exposé dans un autre Mémoire.

Glion s. Montreux, février 1916.

---

# THÉORÈME SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

---

1. — Soit $f(x)$ une fonction développable, au voisinage de $x = 0$, en série de puissances

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{1}$$

chaque coefficient $a_i$ étant réel et positif ou nul, les deux premiers coefficients $a_0$ et $a_1$ pouvant, d'ailleurs, avoir des valeurs réelles quelconques.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des quantités réelles et positives, dont la somme est plus petite que le rayon de convergence de la série (1).

Désignons par

$$\mu = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{et} \qquad M = \frac{f(x_1) + \ldots + (f x_n)}{n}$$