III.— Fonctions symétriques des côtés ou des angles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

façon que leurs accroissements infiniment petits simultanés sont à chaque instant susceptibles de former un triangle.

La longueur de l'arc sera égale à la somme des accroissements finis des coordonnées, correspondant au passage d'une extrémité de l'arc à l'autre, multipliée par un coefficient numérique toujours compris entre 0,5774... *et* 0,7071...

Lorsque, par exemple, les équations de la courbe sont

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

les conditions précédentes qui sont

$$0 \leqq dy - dx \leqq dz \leqq dy + dx$$

(ou bien celles qu'on aurait en intervertissant x, y, z), se résument en inégalités suivantes devant être vérifiées pour tous les points de la courbe sur l'arc considéré :

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{O} \leqq \frac{\mathrm{P}-\mathrm{T}}{\mathrm{T}} \leqq \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{T}} \leqq \frac{\mathrm{P}+\mathrm{T}}{\mathrm{T}}$$

où

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{P} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{Q} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{T} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

III. — *Fonctions symétriques des côtés ou des angles.*

Soit $f(x)$ une fonction de x développable, au voisinage de $x = 0$, en séries de puissances

$$\text{(21)} \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

chaque coefficient a_i étant positif ou nul, les deux premiers coefficients a_0 et a_1 pouvant d'ailleurs être réels quelconques.

Partons du fait suivant facile à démontrer : la valeur du rapport

$$\text{(22)} \qquad \frac{(x+y+z)^p}{x^p + y^p + z^p},$$

où x, y, z, p sont des quantités positives, est toujours comprise entre 1 et 3^{p-1} ; la limite 1 est atteinte lorsque $p=1$ ou lorsque deux des quantités x, y, z sont négligeables par rapport à la troisième; la limite 3^{p-1} est atteinte lorsque $x=y=z$.

On tire pour $p=2, 3, 4 \ldots$

$$a_k(x+y+z)^k \geqq a_k(x^k+y^k+z^k) \,, \tag{23}$$

$$a_k(x+y+z)^k \leqq \frac{a_k}{3}[(3x)^k+(3y)^k+(3z)^k] \,. \tag{24}$$

$$(k=2, 3, 4 \ldots)$$

En supposant la somme $x+y+z$ plus petite que le rayon de convergence de la série (21), de (23) on tire

$$f(x)+f(y)+f(z) \leqq f(x+y+z)+2f(0) \,, \tag{25}$$

et de (24), en y remplaçant $3x$, $3y$, $3z$ par x, y, z, on tire d'abord

$$a_k\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^k \leqq \frac{a_k}{3}(x^k+y^k+z^k)$$

et à l'aide de ceci

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leqq \frac{1}{3}[f(x)+f(y)+f(z)] \,,$$

ou encore

$$f(x)+f(y)+f(z) \geqq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \,. \tag{26}$$

On a ainsi la double inégalité

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leqq f(x)+f(y)+f(z) \leqq f(x+y+z)+2f(0) \,, \tag{27}$$

qui se laisse exprimer par l'égalité

$$f(x)+f(y)+f(z) = \mathrm{F}(x+y+z)+\theta\Phi(x+y+z) \,, \tag{28}$$

où

$$\mathrm{F}(t)=3f\left(\frac{t}{3}\right) \,, \qquad \Phi(t)=f(t)-3f\left(\frac{t}{3}\right)+2f(0) \,, \tag{29}$$

et où θ désigne un coefficient compris entre 0 et 1. Ces deux limites 0 et 1 sont atteintes pour une fonction $f(t)$ arbitraire lorsque deux des quantités x, y, z tendent vers zéro ($\theta = 1$), ou bien lorsque $x = y = z$ ($\theta = 0$).

Appliquons maintenant la proposition aux deux cas suivants :

Premier cas : x, y, z *sont les trois côtés d'un triangle.* En désignant par s le périmètre du triangle, la formule (28) fournit

$$f(a) + f(b) + f(c) = \mathrm{F}(s) + \theta\Phi(s) , \tag{30}$$

F et Φ étant les deux fonctions (29). La limite inférieure $\theta = 0$ est atteinte pour le triangle isocèle ; la limite supérieure $\theta = 1$ n'est jamais atteinte.

Deuxième cas : x, y, z *sont les trois angles d'un triangle exprimés en parties de* π. La formule (28) fournit

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = \mathrm{F}(\pi) + \theta\Phi(\pi) , \tag{31}$$

F et Φ étant les deux fonctions (29). La limite inférieure $\theta = 0$ est atteinte pour le triangle isocèle et la limite supérieure $\theta = 1$ pour le triangle équilatère à un angle obtus voisin de π.

Les formules (30) *et* (31) *fournissent des expressions remarquables des fonctions symétriques des côtés ou des angles d'un triangle.*

Rappelons que ces formules supposent la fonction $f(t)$ développable, au voisinage de $t = 0$, en série de puissances

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots , \tag{32}$$

où chaque coefficient a_i est positif ou nul, les deux premiers coefficients a_0 et a_1 pouvant être réels quelconques. De plus la formule (30) suppose la convergence de la série (32) pour $t = s$ et la formule (31) la convergence de la série $t = \pi$.

En prenant, par exemple,

$$f(t) = e^t ,$$

on trouve pour un triangle quelconque

$$e^\alpha + e^\beta + e^\gamma = \mathrm{M} + \theta\mathrm{N} ,$$

où M et N sont deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$M = 3e^{\frac{\pi}{3}} = 8{,}548\ 96\ldots, \qquad N = 2 + e^{\pi} - 3e^{\frac{\pi}{3}} = 16{,}591\ 34\ldots$$

Nous remarquerons en terminant que les formules (27) et (28) ne sont qu'un cas particulier d'un théorème général exprimant la relation entre la moyenne arithmétique d'un nombre quelconque de quantités positives, et une fonction symétrique arbitraire de ces quantités, qui sera exposé dans un autre Mémoire.

Glion s. Montreux, février 1916.

THÉORÈME SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

---

1. — Soit $f(x)$ une fonction développable, au voisinage de $x = 0$, en série de puissances

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{1}$$

chaque coefficient a_i étant réel et positif ou nul, les deux premiers coefficients a_0 et a_1 pouvant, d'ailleurs, avoir des valeurs réelles quelconques.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des quantités réelles et positives, dont la somme est plus petite que le rayon de convergence de la série (1).

Désignons par

$$\mu = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{et} \qquad M = \frac{f(x_1) + \ldots + (f x_n)}{n}$$