II

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

II

1. — Théorème de Pohlke. — *Trois vecteurs-unités trirectangulaires peuvent toujours, par une projection parallèle, donner trois vecteurs coplanaires formant une figure semblable à celle de trois vecteurs coplanaires connus* $(O'A_k) = \mathfrak{a}_k$, *pourvu que parmi les quatre points* O', A_1, A_2, A_3 *il n'y en ait pas plus de trois en ligne droite.*

Les vecteurs-unités trirectangulaires $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ donneront, la projection se faisant parallèlement au vecteur-unité $\mathfrak{r}$ par des droites de longueurs x_1, x_2, x_3, des vecteurs proportionnels aux $\mathfrak{a}_k$ (voir fig. 3), lorsque les douze composantes de $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ et $\mathfrak{r}$, les trois scalaires x_1, x_2, x_3 et le facteur de proportionnalité m satisfont à :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \mathfrak{i}_1 - x_1\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{i}_2.\mathfrak{i}_3 = 0 & \mathfrak{i}_1.\mathfrak{i}_1 = 1 & \\ \mathfrak{i}_2 - x_2\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{i}_3.\mathfrak{i}_1 = 0 & \mathfrak{i}_2.\mathfrak{i}_2 = 1 & \mathfrak{r}.\mathfrak{r} = 1\ , \\ \mathfrak{i}_3 - x_3\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{i}_1.\mathfrak{i}_2 = 0 & \mathfrak{i}_3\ \mathfrak{i}_3 = 1 & \end{array}\right.$$

c'est-à-dire à un système de *seize* équations scalaires. Nous déterminons successivement le vecteur $\mathfrak{r}$ en fonction des $\mathfrak{i}_k$, le coefficient de proportionnalité m et les trois scalaires x_k.

2. — Les vecteurs donnés $\mathfrak{a}_k$ étant *coplanaires*, il existe des nombres μ_k tels que

$$(2)\quad \mu_1\mathfrak{a}_1 + \mu_2\mathfrak{a}_2 + \mu_3\mathfrak{a}_3 = 0 \quad \text{et} \quad (3)\quad \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1\ ,$$

et si nous multiplions les équations (1) par les μ_k, nous obtiendrons par conséquent en ajoutant :

$$\mu_1\mathfrak{i}_1 + \mu_2\mathfrak{i}_2 + \mu_3\mathfrak{i}_3 = (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)\mathfrak{r}\ .$$

Le premier membre de cette équation est un vecteur-unité à cause de (3) ; $\mathfrak{r}$ est également un vecteur-unité. Il en résulte donc d'abord

$$(4)\quad \mathfrak{r} = \mu_1\mathfrak{i}_1 + \mu_2\mathfrak{i}_2 + \mu_3\mathfrak{i}_3$$

et ensuite, si les x_k sont considérés comme longueurs des composantes d'un vecteur auxiliaire $\mathfrak{x}$ selon les $\mathfrak{i}_k$

$$(5)\quad \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \equiv \mathfrak{r}\ \mathfrak{x} = 1\ .$$

L'équation (4) nous fait connaître la position du *vecteur* $\mathfrak{r}$, *qui détermine la direction de la projection par rapport au trièdre des* $\mathfrak{i}_k$, dès que les constantes μ_k ou leurs rapports sont connus.

3. — Or, en multipliant l'équation (2) *vectoriellement*[1] par les $\mathfrak{a}_k$, nous obtenons, si les angles des $\mathfrak{a}_k$ sont α_k :

$$(6)\qquad \frac{a_2 a_3 \sin\alpha_1}{\mu_1} = \frac{a_3 a_1 \sin\alpha_2}{\mu_2} = \frac{a_1 a_2 \sin\alpha_3}{\mu_3} \equiv \rho$$

et ensuite, si σ est l'aire du triangle, qui d'après (2) peut être construit sur les $\mu_k \mathfrak{a}_k$ comme côtés :

$$(7)\qquad \rho^2 = a_2^2 a_3^2 \sin^2\alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2\alpha_2 + a_1^2 a_2^2 \sin^2\alpha_3 = 4\sigma^2/\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2\ {}^2 .$$

4. — Le vecteur auxiliaire $\mathfrak{x}$ a une signification bien simple. En effet, les produits scalaires $\mathfrak{x}\,.\,\mu_k \mathfrak{a}_k = \mathfrak{x}\,.\,(\mathfrak{i}_k - x_k \mathfrak{r}) = \mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{i}_k - x_k$ étant nuls, *il est normal au plan des trois projections* $m\mathfrak{a}_k$.

5. — Nous connaissons maintenant le vecteur $\mathfrak{r}$, qui détermine la direction de la projection par (4). Pour trouver le facteur de proportionnalité m, prenons la somme des carrés des équations (1) et la somme des carrés des produits vectoriels formés avec ces équations deux à deux[3] ; nous obtien-

---

[1] Le produit vectoriel de (2) par $\mathfrak{a}_1$ donne

$$\mu_2 \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 - \mu_3 \mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{a}_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu_2 a_1 a_2 \sin\alpha_3 = \mu_3 a_3 a_1 \sin\alpha_2 \qquad \text{etc.}$$

[2] L'aire σ du triangle des $\mu_k \mathfrak{a}_k$ satisfait à

$$2\sigma = \mu_2 a_2 . \mu_3 a_3 \sin\alpha_1 = \mu_3 a_3 . \mu_1 a_1 \sin\alpha_2 = \mu_1 a_1 . \mu_2 a_2 \sin\alpha_3$$

donc aussi à

$$4\sigma^2 = 4\sigma^2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) = \mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2(a_2^2 a_3^2 \sin^2\alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2\alpha_2 + a_1^2 a_2^2 \sin^2\alpha_3) .$$

[3] Les premiers membres des deux dernières équations (1) sont :

$$\mathfrak{i}_2 - x_2\mathfrak{r} = \mathfrak{i}_2 - x_2(\mu_1\mathfrak{i}_1 + \mu_2\mathfrak{i}_2 + \mu_3\mathfrak{i}_3) \equiv -\mu_1 x_2 \mathfrak{i}_1 + (1 - \mu_2 x_2)\mathfrak{i}_2 - \mu_3 x_2 \mathfrak{i}_3$$
$$\mathfrak{i}_3 - x_3\mathfrak{r} = \mathfrak{i}_3 - x_3(\mu_1\mathfrak{i}_1 + \mu_2\mathfrak{i}_2 + \mu_3\mathfrak{i}_3) \equiv -\mu_1 x_3 \mathfrak{i}_1 - \mu_2 x_3 \mathfrak{i}_2 + (1 - \mu_3 x_3)\mathfrak{i}_3$$

On trouve pour leur produit vectoriel en tenant compte de (5) $\mu_1(x_1\mathfrak{i}_1 + x_2\mathfrak{i}_2 + x_3\mathfrak{i}_3)$ et pour son carré $\mu_1^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, etc. Le produit vectoriel des seconds membres correspondants est $m^2\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3$ et son carré $m^4 a_2^2 a_3^2 \sin^2\alpha_1$, etc.

drons les relations :

$$1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \equiv m^2 s \tag{8}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= m^4(a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2 \alpha_2 + \ldots) \\ &\equiv 4m^4 \sigma^2/\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2 \end{aligned} \tag{9}$$

qu'il nous est facile de simplifier. En effet, si $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$ sont trois vecteurs-unités coplanaires faisant des angles $2\alpha_k$ et

$$\mathfrak{l} \equiv a_1^2 \mathfrak{l}_1 + a_2^2 \mathfrak{l}_2 + a_3^2 \mathfrak{l}_3 \tag{10}$$

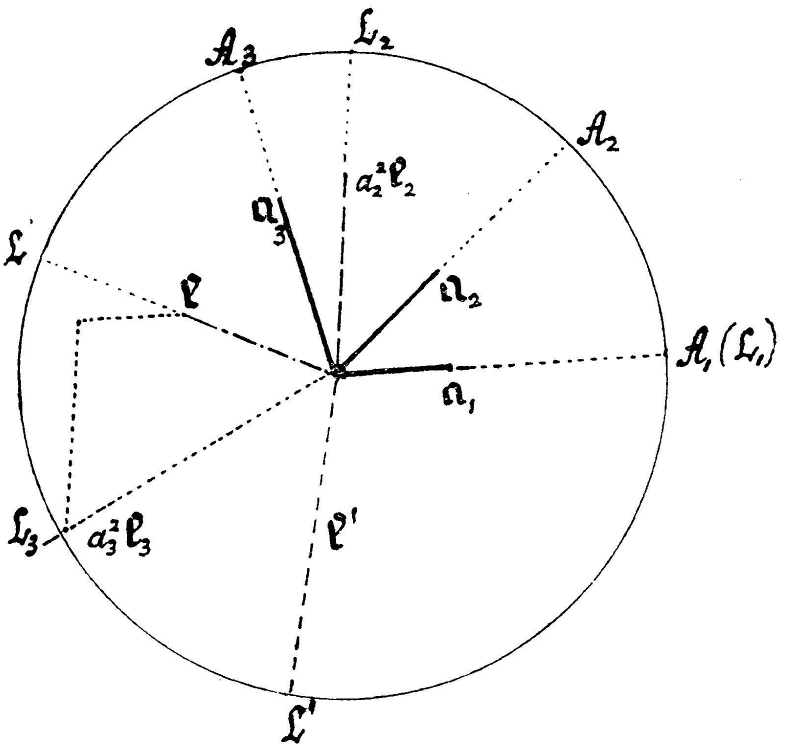

Fig. 2.

un nouveau vecteur auxiliaire de longueur l, nous aurons d'abord évidemment [1] :

$$l < a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \equiv s \tag{11}$$

et ensuite au lieu des deux équations précédentes [2] :

$$1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2 s \quad \text{et} \quad 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = m^4(s^2 - l^2)\ . \tag{12}$$

[1] On a seulement $l = s$ dans le cas où les quatre points O, A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite.

[2] La différence $s^2 - l^2$ est égale (d'après 11, 10 et 7) à $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - (a_1^4 + \ldots + 2a_2^2 a_3^2 \cos 2\alpha_1 + \ldots) \equiv 4(a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + \ldots) = 16\sigma^2/\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2$.

Nous en tirons sans peine pour m^2 la valeur positive

$$m^2 = 2/s - l \,. \tag{13}$$

La seconde valeur de m^2 également positive ne conduit pas, comme il ressort du paragraphe suivant à des x_k réels. Pour la construction du vecteur auxiliaire $\mathfrak{l}$ comme somme des vecteurs $a_k^2 \mathfrak{l}_k$, nous renvoyons à la fig. 2, où nous avons fait coïncider $\mathfrak{l}_1$ avec $\mathfrak{a}_1$, la longueur de ce dernier vecteur étant prise comme unité. Pour obtenir $a_2^2 \mathfrak{l}_2$ et $a_3^2 \mathfrak{l}_3$, il s'agit de construire sur $\mathfrak{a}_2$ respectivement $\mathfrak{a}_3$ comme bases des triangles semblables à ceux qui ont $\mathfrak{a}_1$ comme base et $\mathfrak{a}_2$ respectivement $\mathfrak{a}_3$ comme seconds côtés.

6. — Pour obtenir la grandeur scalaire x_1, nous élevons au carré la première des équations (1)

$$x_1^2 - 2\mu_1 x_1 + 1 = m^2 a_1^2 \quad \text{ou} \quad (x_1 - \mu_1)^2 = m^2 a_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 \,.$$

Les racines de cette équation sont réelles, car si nous substituons pour m^2 la valeur (12) trouvée dans le paragraphe précédent :

$$m^2 = 2(s + l)/(s^2 - l^2) = 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + l)/16\sigma^2 \,.$$

nous trouvons facilement, en introduisant de nouveau *le vecteur auxiliaire* $\mathfrak{l}$ *et les angles positifs qu'il fait avec les* $\mathfrak{l}_k$, *angles que nous nommons* $2\theta_k$

$$\begin{aligned} 16\sigma^2(x_1 - \mu_1)^2 &= 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 .(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + l) - 16\sigma^2 . \mu_2^2 - 16\sigma^2 . \mu_3^2 \\ &= 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 .(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + l) - 4\mu_3^2\mu_1^2 a_3^2 a_1^2 \sin^2 \alpha_2 . \mu_2^2 \\ &\qquad - 4\mu_1^2\mu_2^2 a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3 . \mu_3^2 \\ &= 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 .(a_1^2 + a_2^2 \cos 2\alpha_3 + a_3^2 \cos 2\alpha_2 + l) \\ &= 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 .(l \cos 2\theta_1 + l) \text{ [1]} \\ &= 4\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 . l \cos^2 \theta_1 \,. \end{aligned}$$

---

[1] Le vecteur auxiliaire $\mathfrak{l}$ fait avec $\mathfrak{l}_1$ l'angle $2\theta_1$; nous avons donc d'une part $\mathfrak{l} . \mathfrak{l}_1 = l \cos 2\theta_1$; d'autre part, d'après (10) aussi

$$\mathfrak{l} . \mathfrak{l}_1 = (a_1^2 \mathfrak{l}_1 + a_2^2 \mathfrak{l}_2 + a_3^2 \mathfrak{l}_3) . \mathfrak{l}_1 = a_1^2 + a_2^2 \cos 2\alpha_3 + \alpha_3^2 \cos 2\alpha_2 \,.$$

Il en résulte, si ε_k est l'unité positive ou négative, et si par abréviation nous posons :

$$|\mu_1 \mu_2 \mu_3 . a_k . \cos \theta_k . \sqrt{l} : 2\sigma| \equiv \Delta_k \tag{14}$$

pour les valeurs des x_k, qui constituent (voir paragraphe 4) les grandeurs des composantes de la normale au plan des projections :

$$x_k = \mu_k + \varepsilon_k \Delta_k \tag{15}$$

où seuls les ε_k sont inconnus. Or en utilisant successivement les relations (5), (3) et (14) nous trouvons d'une part :

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 - 1 = \mu_1(\mu_1 + \varepsilon_1 \Delta_1) + \mu_2(\mu_2 + \varepsilon_2 \Delta_2) + \mu_3(\mu_3 + \varepsilon_3 \Delta_3) - 1$$

$$= \mu_1 \varepsilon_1 \Delta_1 + \mu_2 \varepsilon_2 \Delta_2 + \mu_3 \varepsilon_3 \Delta_3 = 0 \tag{16}$$

$$\text{ou} \qquad \mu_1 \varepsilon_1 |a_1 \cos \theta_1| + \mu_2 \varepsilon_2 |a_2 \cos \theta_2| + \mu_3 \varepsilon_3 |a_3 \cos \theta_3| = 0 \ .$$

d'autre part si (fig. 2) L′ est le milieu de (LL$_1$) et $\mathfrak{l}'$ un vecteur-unité dans cette direction[1]

$$\mathfrak{l}'.(\mu_1 \mathfrak{a}_1 + \mu_2 \mathfrak{a}_2 + \mu_3 \mathfrak{a}_3) = \mu_1 a_1 \cos \theta_1 + \mu_2 a_2 \cos \theta_2 + \mu_3 a_3 \cos \theta_3 = 0. \tag{17}$$

La comparaison de (16) et (17) nous apprend que les signes des ε_k doivent être tous égaux ou bien tous opposés à ceux des $a_k \cos \theta_k$. *Ces dernières grandeurs sont les projections des $\mathfrak{a}_k$ sur $\mathfrak{l}'$.*

7. — Nous possédons maintenant, les ε_k étant déterminés de cette manière, trois vecteurs

$$\mathfrak{i}_1 - (\mu_1 + \varepsilon_1 \Delta_1)\mathfrak{r} \ , \qquad \mathfrak{i}_2 - (\mu_2 + \varepsilon_2 \Delta_2)\mathfrak{r} \ , \qquad \mathfrak{i}_3 - (\mu_3 + \varepsilon_3 \Delta_3)\mathfrak{r}$$

dont les *grandeurs*, d'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, sont *proportionnelles* à celles des $\mathfrak{a}_k$. Le coefficient de proportionnalité a été trouvé au paragraphe 5. Si nous ajoutons ces vecteurs, après les avoir multipliés par

---

[1] On a en effet

$$2\theta_3 \equiv (\mathrm{LL}_3) = (\mathrm{LL}_1) + (\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2) + (\mathrm{L}_2\mathrm{L}_3)$$
$$= 2(\mathrm{L'A}_1) + 2(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2) + 2(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3) = 2(\mathrm{L'A}_3) \ ,$$

c'est-à-dire $(\mathrm{L'A}_3) = \theta_3$, et de même $(\mathrm{L'A}_2) = \theta_2$ et $(\mathrm{L'A}_1) = \theta_1$.

les μ_k, ils donneront, absolument comme les $\mathfrak{a}_k$, une *somme*

$$-(\mu_1 \varepsilon_1 \Delta_1 + \mu_2 \varepsilon_2 \Delta_2 + \mu_3 \varepsilon_3 \Delta_3)\mathfrak{r}$$

nulle, à cause de l'équation (16), ce qui nous prouve : 1° qu'ils sont *coplanaires* et 2° qu'ils font bien, le triangle formé étant semblable à celui des $\mu_k \mathfrak{a}_k$, *entre eux aussi les angles* α_k.

8. — Il nous reste à dire un mot sur le vecteur *normal* au plan des projections. Ce vecteur est, d'après ce que nous avons vu au paragraphe 4 :

$$\mathfrak{x} = (\mu_1 + \varepsilon_1 \Delta_1)\mathfrak{i}_1 + (\mu_2 + \varepsilon_2 \Delta_2)\mathfrak{i}_2 + (\mu_3 + \varepsilon_3 \Delta_3)\mathfrak{i}_3 \ . \tag{18}$$

Les équations (6), (7) et (14) permettent de l'écrire :

$$(a_2 a_3 \sin \alpha_1 \pm a_1 \cos \theta_1 \sqrt{l})\mathfrak{i}_1 + (a_3 a_1 \sin \alpha_2 \pm a_2 \cos \theta_2 . \sqrt{l})\mathfrak{i}_2 + (a_1 a_2 \sin \alpha_3 \pm a_3 \cos \theta_3 . \sqrt{l})\mathfrak{i}_3 \ . \tag{19}$$

9. — Il y a donc en général deux solutions, et comme dans (18) les deux parties dont se compose le second membre

$$\mu_1 \mathfrak{i}_1 + \mu_2 \mathfrak{i}_2 + \mu_3 \mathfrak{i}_3 = \mathfrak{r} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 \Delta_1 \mathfrak{i}_1 + \varepsilon_2 \Delta_2 \mathfrak{i}_2 + \varepsilon_3 \Delta_3 \mathfrak{i}_3$$

sont des vecteurs normaux, vu que leur produit scalaire

$$\mu_1 \varepsilon_1 \Delta_1 + \mu_2 \varepsilon_2 \Delta_2 + \mu_3 \varepsilon_3 \Delta_3$$

est nul à cause de (16), les deux $\mathfrak{x}$ sont symétriques par rapport à $\mathfrak{r}$.

10. — Les deux solutions coïncident, lorsque (19)

$$l \equiv | a_1^2 \mathfrak{l}_1 + a_2^2 \mathfrak{l}_2 + a_3^2 \mathfrak{l}_3 |$$

est nul. Dans ce cas $\mathfrak{x}$ coïncide avec $\mathfrak{r}$: la projection est *orthogonale*.

11. — La construction des vecteurs $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{r}$ qui déterminent les plans de projection et la direction des droites projetantes par rapport au trièdre trirectangulaire des $\mathfrak{i}_k$ ne présente aucune difficulté. Tous les éléments essentiels de cette construction se trouvent dans la figure 2.

Fribourg (Suisse), octobre 1915.