Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'ARITHMÉTIQUE DES NOMBRES HYPERCOMPLEXES

Kapitel: IV

Autor: DuPasquier, L.-G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16879

Résumant les considérations précédentes, nous dirons : il existe des systèmes de nombres hypercomplexes où l'on peut procéder de plusieurs façons pour séparer le corps des complexes rationnels en « nombres entiers » et « nombres non entiers ».

IV

40. — Dans les chapitres précédents, nous avons reconnu que définir le complexe « entier » de façon satisfaisante revient à déterminer le domaine holoïde maximal (éventuellement, s'il y en a plusieurs, les domaines holoïdes maximaux) du corps de nombres $\{R\}$ constitué par l'ensemble des éléments

$$x = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} x_\lambda e_\lambda$$

où toutes les coordonnées x_λ sont des nombres rationnels arbitraires. On pourrait se demander si, étant donné un système quelconque de nombres hypercomplexes, on peut toujours séparer ainsi le corps $\{R\}$ des complexes rationnels en deux groupes, l'un comprenant tous les complexes entiers, l'autre tous les complexes non entiers.

De prime abord, on ne posera guère cette question ; on est porté tout naturellement à croire qu'on peut toujours procéder de façon satisfaisante à cette distinction essentielle entre complexes entiers et non entiers, peut-être d'une seule manière, comme pour les nombres complexes de *Gauss*, peut-être de plusieurs manières, comme pour les tettarions; mais en tout cas, si on se laisse guider uniquement par l'analogie, on admettra implicitement et *a priori* que cela est toujours possible. Or, il n'en est rien. D'une manière plus précise : les recherches aboutissent au résultat surprenant exprimé par le théorème que voici: *Il existe des corps de nombres hypercomplexes rationnels contenant une infinité de domaines holoïdes, mais parmi lesquels* aucun *n'est maximal.*

41. — Exprimons ce fait d'une manière plus frappante. On a toujours à sa disposition, cela va sans dire, la définition *lipschitzienne* du nombre hypercomplexe entier (v. définition V); c'est même là son grand avantage : d'être toujours applicable et toujours univoque. Mais nous avons reconnu que cette définition qui s'en tient uniquement à la nature des coordonnées, sans considérer en aucune manière les propriétés intrinsèques du système de nombres hypercomplexes en question, doit être écartée comme non satisfaisante, comme pouvant conduire à des arithnomies non régulières; nous avons montré qu'il faut avoir recours à la définition *hurwitzienne* (v. définition IX). Or, celle-ci implique l'existence d'un domaine holoïde *maximal ;* sans domaine holoïde maximal, point de nombres entiers.

Le théorème énoncé tout à l'heure prouve la réalité des trois possibilités suivantes : certains corps de nombres contiennent *un seul* système de « nombres entiers » ; la définition du complexe entier y est absolue et unique. D'autres corps de nombres contiennent *plusieurs* systèmes différents de « nombres entiers » ; la définition du complexe entier y est relative et plurivoque. Enfin, d'autres corps de nombres encore ne contiennent aucun système de « nombres entiers »; la définition du complexe entier y devient, jusqu'à un certain degré, arbitraire; aussi faut-il s'attendre à ce que l'arithnomie correspondante en porte l'empreinte plus ou moins profonde.

Nous allons citer un exemple simple de nombres hypercomplexes doués de cette particularité.

42. — Envisageons des nombres hypercomplexes à trois unités relatives, tels $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, les nombres x_λ, dits *coordonnées du complexe* x, étant, comme toujours, des nombres *réels* arbitraires. Si $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ et $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ sont deux quelconques de ces complexes, on définit *l'égalité* et *l'addition* de ces deux complexes par l'égalité et l'addition de leurs coordonnées correspondantes. En d'autres termes, $a = b$ signifie l'existence simultanée des trois égalités $a_\lambda = b_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3)$; *la soustraction,* opération inverse de l'addition, est alors toujours

possible et univoque, et l'on a les formules :

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1)e_1 + (a_2 \pm b_2)e_2 + (a_3 \pm b_3)e_3 \ .$$

En additionnant r fois de suite un complexe à lui-même, on trouve que

$$r \, . \, a = ra_1 e_1 + ra_2 e_2 + ra_3 e_3 \tag{19}$$

et l'on étendra cette règle, par définition, à la multiplication par un nombre réel r quelconque.

La *multiplication* de ces complexes entre eux est fixée par le tableau suivant qui donne le produit $e_i . e_k$ à l'intersection de la ligne horizontale portant à gauche e_i et de la colonne verticale portant en haut e_k $(i, k = 1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	0
e_2	e_2	0	0
e_3	0	0	e_3

(20)

Il en résulte que la multiplication est toujours commutative, $a \, . \, b = b \, . \, a$.

Nous appellerons un tel complexe *réel*, quand sa coordonnée moyenne sera nulle et en même temps ses deux coordonnées extrêmes égales entre elles. Inversement : tout nombre réel r pourra être envisagé comme un tel complexe de la forme $r = re_1 + re_3 = r(e_1 + e_3)$. On vérifie sans peine que le symbole $e_1 + e_3$ joue le rôle du nombre 1, de sorte qu'on peut poser ici :

$$e_1 + e_3 = 1$$

et que la règle exprimée par l'égalité (19) n'est qu'un cas particulier des définitions condensées dans le tableau (20).

43. — A tout complexe $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ correspond un *conjugué* unique et bien déterminé :

$$A' = a_1 a_3 e_1 - a_2 a_3 e_2 + a_1^2 e_3 \ .$$

Le produit d'un complexe a et de son conjugué A' est *toujours réel* et s'appelle « *la norme* de a », en signes :

$$N(a) = a.A' = a_1^2 a_3 .$$

La norme d'un produit est égale au produit des normes de ses facteurs.

Si la norme de a est nulle, ce complexe a est dit « un diviseur de zéro »[1]. Cela se présente dès que l'une au moins des coordonnées extrêmes est nulle, et sans qu'on ait, pour cela, nécessairement $a = 0$. Un produit de tels complexes peut ainsi être nul sans qu'aucun facteur ne le soit (v. **27**).

La *division*, comme opération inverse de la multiplication, est définie dans ce système de nombres hypercomplexes par la formule :

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a.B'}{N(b)} = \frac{a_1}{b_1} e_1 - \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1^2} e_2 + \frac{a_3}{b_3} e_3 .$$

Au moyen de ces définitions, les 4 opérations rationnelles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division (sauf, éventuellement, la division par un diviseur de zéro) sont parfaitement et univoquement établies dans le domaine de ces nombres hypercomplexes, et l'on peut dire qu'elles s'effectuent « suivant les règles ordinaires de l'algèbre », en tenant compte du tableau (20).

44. — Faisons remarquer, en passant, que ce système spécial de nombres hypercomplexes à trois coordonnées est un sous-système, ou cas particulier, des tritettarions (v. art. 29 et 30). On peut en effet représenter le complexe $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ par le schéma carré

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{Bmatrix}$$

[1] Il ne faut pas confondre « diviseur de zéro » avec « racine de zéro ». Tout nombre hypercomplexe dont l'une des puissances est nulle est dit *racine de zéro* (d'après *G. Frobenius*), ou *nombre pseudo-nul* (d'après *E. Cartan*), quelquefois *nombre nilpotent* (d'après *B. Peirce*). Un nombre pseudo-nul est toujours diviseur de zéro, mais la réciproque peut ne pas avoir lieu. Par exemple, dans le système dont il est ici question, e_2 est pseudo-nul, puisque $e_2^2 = 0$, tandis que e_1 est diviseur de zéro sans être racine de zéro.

caractérisé par

$$a_{11} = a_{22} \; ; \qquad a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = a_{21} = 0 \; .$$

45. — Nous allons envisager le corps de nombres $\{K\}$ constitué par l'ensemble de tous les complexes rationnels du système en question (v. article 14). Le premier pas à faire pour construire l'arithmétique généralisée de ce corps $\{K\}$ consiste à y définir le complexe *entier*. Cela revient à déterminer, comme nous l'avons montré plus haut, le domaine holoïde maximal, éventuellement les domaines holoïdes maximaux, de ce corps de nombres $\{K\}$. Pour cette détermination, prenons comme point de départ le théorème fondamental suivant :

Le domaine holoïde le plus général contenu dans le corps de nombres $\{K\}$ *a comme base*

$$\left.\begin{aligned} b^{(1)} &= g^2 g_1 e_1 \\ b^{(2)} &= e_1 + e_3 \\ b^{(3)} &= g g_1 g_2 e_1 + \gamma e_2 \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

où γ est un nombre rationnel non nul du reste arbitraire, et g, g_1, g_2 des nombres entiers quelconques assujettis aux seules conditions $g \neq 0$, $g_1 \neq 0$.

L'ensemble de tous les complexes

$$m_1 . b^{(1)} + m_2 . b^{(2)} + m_3 . b^{(3)}$$

où les nombres m_1, m_2, m_3 prennent, de toutes les manières possibles, les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, alors que g, g_1, g_2, γ conservent la même valeur arbitrairement choisie, mais fixe, cet ensemble, dis-je, constitue donc toujours un domaine holoïde; nous le désignons par $[h]$. Inversement : dans tout domaine holoïde faisant partie du corps $\{K\}$, il est possible de choisir une base de la forme (B). Les différents domaines holoïdes de ce corps de nombres ne diffèrent entre eux que par le choix des nombres g, g_1, g_2, γ servant à former la base (B). Il s'agit de déterminer les conditions pour qu'un tel domaine holoïde $[h]$ soit maximal.

46. — On démontre facilement qu'une condition nécessaire pour que $[h]$ soit maximal est que $g = g_1 = 1$; $g_2 = 0$; et qu'un domaine holoïde du corps de nombres $\{K\}$ ne saurait être maximal s'il ne possède une base telle que

$$a^{(1)} = e_1 \,, \qquad a^{(2)} = \gamma e_2 \,, \qquad a^{(3)} = e_3 \qquad (B_1)$$

Désignons par $[H_1]$ le domaine holoïde correspondant à cette base (B_1) ; il sera constitué par l'ensemble de tous les complexes

$$m_1 . e_1 + m_2 \gamma . e_2 + m_3 . e_3$$

où $\gamma \neq 0$ est un nombre rationnel arbitrairement choisi, mais fixe, tandis que les m_λ représentent, comme d'habitude, des nombres entiers ordinaires variant de $-\infty$ à $+\infty$. On voit, en effet, que $[H_1]$, puisqu'il contient e_1, e_3 et γe_2, contient aussi les éléments de la base (B), donc aussi cette base elle-même, donc aussi tous les complexes qu'on peut dériver de cette base (B), en d'autres termes : tous les complexes dont se compose $[h]$ et, par conséquent, $[h]$ lui-même. Mais $[H_1]$ contient, en outre, des complexes ne faisant pas partie de $[h]$, par exemple e_3, dès que $g > 1$ ou $g_1 > 1$. Donc enfin, $[h]$ ne saurait en tout cas être maximal s'il ne coïncide avec

$$[H_1] = [m_1 . e_1 + m_2 \gamma . e_2 + m_3 . e_3] \,.$$

C'est là une condition nécessaire, mais pas encore suffisante, comme on va le voir.

47. — Mettons γ, qui est un nombre rationnel non nul, sous forme de fraction irréductible en posant : $\gamma = \frac{r}{p}$. Un domaine holoïde du corps $\{K\}$ ayant une base de la forme (B_1) ne pourra être maximal si le nombre entier $r > 1$. On s'en convainc en supposant $\gamma = \frac{1}{p}$ et prenant comme base

$$c^{(1)} = e_1 \,, \qquad c^{(2)} = \frac{1}{p} e_2 \,, \qquad c^{(3)} = e_3 \,. \qquad (B_2)$$

Déduisons de cette base (B_2) le domaine holoïde

$$[H_2] = \left[m_1 . e_1 + \frac{m_2}{p} . e_2 + m_3 . e_3 \right]$$

et comparons-le au domaine $[H_1]$. On vérifie immédiatement que pour $r = 1$, ces deux domaines holoïdes coïncident, c'est-à-dire contiennent exactement les mêmes complexes, mais que pour $r > 1$, le domaine holoïde $[H_2]$, contenant $\frac{1}{p} \cdot e_2$ qui ne fait pas partie de $[H_1]$, contient tous les éléments de $[H_1]$ plus encore d'autres non renfermés dans $[H_1]$. On en conclut qu'un domaine holoïde du corps $\{K\}$, pour être maximal, doit posséder une base de la forme (B_2), où p est un nombre entier non nul, du reste arbitraire. Nous allons montrer que cette condition, nécessaire, n'est pas suffisante.

48. — Si $p = 1$, on a le domaine holoïde

$$[L] = [m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3]$$

constitué par tous les complexes à coordonnées entières ; ce n'est pas autre chose que le domaine *lipschitzien* (v. définition V). Or, ici, ce domaine $[L]$ n'est pas maximal (pas plus qu'il ne l'est dans le cas des quaternions). Pour s'en convaincre, il suffit de constater qu'on peut l'agrandir, sans sortir du corps de nombres $\{K\}$, en *adjoignant* à $[L]$ le complexe $\frac{e_2}{2}$ qui n'y est pas contenu. On obtient alors l'ensemble élargi

$$[J_2] = \left[m_1 e_1 + \frac{m_2}{2} e_2 + m_3 e_3\right]$$

plus étendu que $[L]$ et qui est également un domaine holoïde. Donc, si l'on veut un domaine holoïde *maximal* de base (B_2), il faut en tout cas choisir $p > 1$.

49. — Les faits prouvés ci-dessus portent à croire que

$$[H_2] = \text{ensemble des complexes } m_1 e_1 + \frac{m_2}{p} e_2 + m_3 e_3$$

est un domaine holoïde maximal. Mais il n'en est rien. On peut en effet, sans sortir du corps de nombres $\{K\}$, élargir encore le domaine holoïde $[H_2]$ en lui adjoignant le complexe $\frac{e_2}{p^2}$. Ce complexe ne fait pas partie de $[H_2]$, puisque l'équation

$$\frac{e_2}{p^2} = m_1 e_1 + \frac{m_2}{p} e_2 + m_3 e_3$$

entraînerait, en vertu de la définition de l'égalité des complexes, $m_1 = m_3 = 0$, $\frac{m_2}{p} = \frac{1}{p^2}$, d'où $m_2 = \frac{1}{p}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse expresse $p > 1$ et $m_2 =$ un nombre *entier*.

Il s'ensuit que le domaine $[H_3]$ ayant pour base

$$b^{(1)} = e_1 \,, \qquad b^{(2)} = \frac{1}{p^2} e_2 \,, \qquad b^{(3)} = e_3 \qquad (B_3)$$

et constitué par l'ensemble de tous les complexes

$$m_1 e_1 + \frac{m_2}{p^2} e_2 + m_3 e_3 \,,$$

contient aussi $\frac{pe_2}{p^2} = \frac{e_2}{p}$, donc aussi la base (B_2), donc aussi tous les éléments dérivables de cette base, donc aussi $[H_2]$. En d'autres termes : $[H_3]$ contient tous les éléments de $[H_2]$ plus encore d'autres ne faisant pas partie de $[H_2]$. Or, $[H_3]$ est de nouveau un domaine holoïde ; on en conclut que $[H_2]$ ne saurait être maximal.

En posant $p^2 = g$ et répétant le même raisonnement sur le domaine $[H_3]$ dérivé de la base $\left[e_1, \frac{e_2}{g}, e_3\right]$ qui n'est autre que la base (B_3) écrite différemment, on verrait que $[H_3]$ n'est pas non plus maximal.

Puisque p est un nombre naturel supérieur à 1 et d'ailleurs absolument arbitraire, on voit bien que *dans le corps de nombres* $\{K\}$, *il n'y a pas de domaine holoïde* maximal.

50. — *Remarque.* Pour obtenir un domaine maximal, on pourrait penser qu'il suffit d'attribuer aussi à p différentes valeurs. Mais il faudrait faire prendre à p toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$; et alors, l'ensemble $\{J\}$ formé par tous les complexes $m_1 e_1 + \frac{m_2}{m_4} e_2 + m_3 e_3$, où les m_λ représentent des entiers arbitraires $(m_4 \neq 0)$, est bien un domaine d'intégrité contenant le nombre 1 ; mais il ne possède pas de *base finie* au sens de l'article 16 ; en d'autres termes : il n'est pas possible de choisir dans $\{J\}$ un nombre fini de complexes pouvant reproduire, par les seules opérations de l'addition et de la soustraction, tous les éléments de l'ensemble en question. Donc, $\{J\}$ n'est pas un domaine holoïde et ne saurait être envisagé comme composé exclusivement de nombres *entiers* (v. article 17).

V

51. — Bien que le corps de nombres $\{K\}$ ne contienne aucun domaine holoïde maximal, on peut néanmoins tenter d'y construire une arithmétique généralisée. Comme fondement de cette arithnomie, on essaiera la

Définition XI : un complexe rationnel

$$a = m_1 e_1 + \frac{m_2}{g} e_2 + m_3 e_3$$

est réputé *entier*, si m_1, m_2, m_3 représentent des nombres entiers ordinaires, pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, g étant un nombre entier non nul, arbitrairement choisi, mais fixe.

L'ensemble

$$[H] = \left[m_1 e_1 + \frac{m_2}{g} e_2 + m_3 e_3 \right]$$

est bien un domaine holoïde, et il renfermera exclusivement des complexes *entiers*, en vertu de la définition XI ; tous les autres complexes du corps $\{K\}$, c'est-à-dire ceux ne faisant pas partie de [H], seront réputés *non entiers*.

Les « nombres entiers » dont nous allons faire la théorie constituent un domaine holoïde non maximal, de sorte qu'il faut s'attendre *a priori* à ce que cette arithnomie ne soit pas régulière, mais présente des singularités étonnantes, comparée à l'arithmétique classique.

52. — Pour abréger l'écriture, nous représenterons nos complexes entiers en écrivant uniquement les coordonnées. Nous figurerons ces complexes, sans écrire les unités relatives e_λ ni les signes $+$, en mettant simplement les coordonnées, séparées par des vigules, entre parenthèses ; et ce seront ces parenthèses qui indiqueront symboliquement la