

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ESSAI SUR LA THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION DANS LES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Kapitel: II. — Propositions conditionnelles. Indéterminées pouvant ENTRER DANS UNE PROPOSITION CONDITIONNELLE. PROPOSITIONS CONDITIONNELLES ILLUSOIRES.

Autor: Zaremba, S.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16869>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

une théorie mathématique, on puisse raisonnablement adopter l'un quelconque des systèmes logiquement possibles de postulats. En réalité on doit tenir compte d'une foule de circonstances telles que le degré d'évidence des postulats, la simplicité plus ou moins grande des démonstrations selon le système de postulats adoptés, etc. Mais, dans cet ordre de choses, les préférences personnelles ne peuvent jamais être complètement écartées et, en outre, l'évolution de la science nous apprend qu'il est souvent utile de remanier les théories précédemment élaborées en substituant aux postulats adoptés d'abord, un autre système de postulats. Il va sans dire qu'un remaniement d'une théorie peut porter non seulement sur les postulats, mais encore sur les définitions, et alors une proposition qui, dans un mode d'exposition, est vraie par définition peut, dans un autre mode d'exposition acquérir le caractère d'un postulat ou celui d'un théorème.

Plus tard, au § 18, nous aurons l'occasion de constater la relativité des notions de postulat et de définition encore à un nouveau point de vue.

II. — PROPOSITIONS CONDITIONNELLES. INDÉTERMINÉES POUVANT ENTRER DANS UNE PROPOSITION CONDITIONNELLE. PROPOSITIONS CONDITIONNELLES ILLUSOIRES.

§ 7. — Nous appellerons *proposition conditionnelle* toute proposition exprimant une relation de la forme suivante : lorsqu'une certaine proposition (H) est vraie, une certaine autre proposition (C) est vraie aussi ; la proposition (H) s'appellera *hypothèse* et la proposition (C), *conclusion* de la proposition conditionnelle. Toute proposition non conditionnelle s'appellera *proposition catégorique*.

La précédente division des propositions en deux catégories porte en réalité sur la forme de celles-ci et non sur le sens, car le sens d'une proposition catégorique peut toujours être rendu au moyen d'une proposition conditionnelle. Ainsi par exemple la proposition « le nombre 7 est un nombre premier » est une proposition catégorique mais, au fond,

elle n'exprime pas autre chose que la proposition conditionnelle suivante : « lorsqu'un symbole a représente le nombre 7, il représente un nombre premier ».

Bien qu'il n'y ait qu'une différence de forme entre les propositions conditionnelles et les propositions catégoriques, la distinction de ces deux genres de propositions est fondamentale pour nous à cause du caractère formel des démonstrations déductives en général et des démonstrations mathématiques en particulier.

§ 8. — Une proposition conditionnelle peut contenir un certain nombre de symboles, que nous appellerons *indéterminées* de la proposition, offrant cela de particulier que le sens de la proposition ne serait pas altéré si l'on remplaçait ces symboles par n'importe quels nouveaux symboles, pourvu que ces nouveaux symboles soient différents entre eux et différents des autres symboles entrant dans la proposition considérée. Voici un exemple d'une proposition conditionnelle contenant des indéterminées :

« Lorsque a et b représentent deux nombres réels ou complexes, l'égalité suivante :

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

a lieu ».

Il est évident que, au sens indiqué plus haut, la proposition précédente contient deux indéterminées, à savoir a et b . Il arrive souvent que, pour abrégé, on énonce une proposition conditionnelle contenant des indéterminées sans mettre celles-ci explicitement en évidence. Ainsi, par exemple, quand on dit que « deux droites dont chacune est parallèle à une troisième sont parallèles entre elles », on énonce une proposition conditionnelle contenant en réalité trois indéterminées sous-entendues qui, d'après l'hypothèse de la proposition conditionnelle considérée, représentent trois droites dont deux sont parallèles à la troisième. Nous admettrons, dans la suite, que les indéterminées de chaque proposition conditionnelle qui en contient ont été mises explicitement en évidence.

On verra, dans les chapitres suivants, combien est impor-

tant le rôle des propositions conditionnelles dans les démonstrations mathématiques.

§ 9. — Les propositions conditionnelles que l'on rencontre ordinairement dans les théories mathématiques contiennent des indéterminées et cela de telle façon qu'il est possible d'attribuer à celles-ci à volonté, soit un sens tel que l'hypothèse devienne une proposition vraie, soit tel que l'hypothèse devienne fausse. C'est ainsi que, dans le premier exemple considéré au paragraphe précédent, l'hypothèse est constituée par la proposition suivante : « les symboles u et v représentent deux nombres réels ou complexes », et cette proposition pourra être vraie ou fausse selon la signification particulière attribuée aux indéterminées. Mais il peut arriver que l'hypothèse d'une proposition conditionnelle soit inexacte dans tous les cas et cela soit parce qu'il est impossible d'attribuer aux indéterminées, quand il y en a, une signification telle que l'hypothèse devienne une proposition vraie, soit parce qu'il n'y a pas d'indéterminées et qu'en même temps l'hypothèse de la proposition conditionnelle considérée constitue une affirmation inexacte.

Nous dirons qu'une proposition conditionnelle dont l'hypothèse est inexacte est une proposition *illusoire*.

Dès que l'on a constaté qu'une proposition conditionnelle est illusoire, celle-ci perd évidemment tout intérêt, mais il en est tout autrement tant que cette circonstance n'a pas été établie et c'est ce qui fait que, dans la pratique, on est souvent conduit à considérer momentanément des propositions conditionnelles que l'on reconnaît plus tard être des propositions illusoires. Ainsi par exemple, dans la théorie des parallèles, telle qu'elle est exposée dans de nombreux traités, on rencontre, au cours d'une démonstration, la proposition illusoire suivante :

« Si deux droites, situées dans un même plan et perpendiculaires à une troisième droite, située dans ce plan, n'étaient pas parallèles, il existerait un point par lequel passeraient deux perpendiculaires à la troisième droite ».

Il est aisé de voir qu'une proposition conditionnelle illusoire ne peut en réalité jamais être ni vraie ni fausse. En

effet, aucune proposition conditionnelle ne contient un jugement relatif à la vérité ou à la fausseté de l'hypothèse ; le jugement exprimé par une proposition conditionnelle se rapporte exclusivement au cas où l'hypothèse est vérifiée. Or, pour une proposition illusoire, ce cas ne se présente pas. Donc, malgré l'apparence contraire, celle-ci n'exprime en réalité aucun jugement et, dès lors, elle ne peut être ni vraie ni fausse.

Toutefois, lorsque, sans se demander si une proposition conditionnelle donnée est illusoire, on cherche à la démontrer suivant les règles ordinaires, on peut réussir même dans le cas où la proposition considérée est en réalité illusoire. Cela étant, nous conviendrons, comme on le fait, au moins implicitement, dans tous les traités de mathématiques, de regarder l'ensemble des propositions illusoires comme une classe particulière de propositions vraies. Cette convention ne nous expose à aucune contradiction parce qu'une proposition illusoire, ne contenant en réalité aucun jugement, ne peut être en contradiction avec quelque autre proposition qu'en apparence, mais jamais en réalité ; s'il arrive par exemple que, sans tenir compte de ce qu'une proposition conditionnelle peut être illusoire, on ait démontré deux propositions conditionnelles ayant même hypothèse mais telles qu'il y ait contradictions entre les conclusions, on n'aura nullement démontré deux propositions conditionnelles qui se contredisent ; en réalité, on aura simplement établi que chacune des deux propositions considérées est illusoire ; en d'autres termes, on aura démontré l'inexactitude de l'hypothèse commune des deux propositions conditionnelles.

III. — CHAINON LOGIQUE. DÉMONSTRATIONS AFFECTANT LA FORME D'UNE SIMPLE SUITE DE CHAINONS LOGIQUES. DÉMONSTRATIONS RAMIFIÉES.

§ 10. — Avant d'aborder le sujet propre de ce chapitre, nous allons définir une expression qui permettra d'abrégé beaucoup le langage dans la suite.