CINQUANTE CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES DU CENTRE DE COURBURE D'UNE CONIQUE A CENTRE

Autor(en): **Balitrand, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16880

CINQUANTE CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

DU

CENTRE DE COURBURE D'UNE CONIQUE A CENTRE

PAR

F. BALITRAND (Nant, Aveyron, France).

Les constructions du centre de courbure d'une conique sont nombreuses, mais elles ne sont intéressantes que si elles sont simples. Dans ce qui suit nous en avons réuni un certain nombre, cinquante au total, remplissant cette condition. Nous avons indiqué, quand nous l'avons pu, les sources où nous avons puisé, quoiqu'elles ne soient pas toujours originales. Parmi les constructions qui ne comportent aucune référence bibliographique, beaucoup sont certainement connues ; quelques-unes sont peut-être inédites. En terminant nous avons donné plusieurs expressions du rayon de courbure, choisies parmi les plus simples et les plus connues[1].

Notations. — Nous désignerons par :

Ox et Oy les axes de la conique ;

F et F$'$ les foyers ;

M et C un point de la courbe et le centre de courbure correspondant ;

T et T$'$, N et N$'$ les points où la tangente et la normale en M coupent Ox et Oy ;

θ et ν les points de rencontre des perpendiculaires aux axes Ox et Oy en T et T$'$, N et N$'$;

---

[1] M. M. d'OCAGNE vient de publier (*Enseig. math.*, 1915, p. 307) un article sur le même sujet. Mais comme il ne traite guère que le cas où la conique est définie par ses axes, nous nous sommes décidé quand même à publier la présente note, commencée depuis longtemps.

t et t', n et n' les points où la tangente et la normale rencontrent les perpendiculaires élevées en F et F' aux rayons vecteurs ; t et t' sont sur les directrices ;

φ le point d'intersection de ces perpendiculaires.

Nous supposerons en premier lieu la conique déterminée par ses axes Ox et Oy, le point M et la tangente en ce point.

I. — On mène par le point N la parallèle à la tangente jusqu'à sa rencontre avec le diamètre OM ; la perpendiculaire abaissée de ce point de rencontre sur Ox passe au centre de courbure [1].

On peut remplacer le point N par le point N' et l'axe Ox par l'axe Oy ; d'où il résulte l'énoncé suivant :

Les parallèles à la tangente menées par N et N' coupent le diamètre OM en deux points tels que les perpendiculaires abaissées de ces points sur les axes correspondants se croisent au centre de courbure.

La même remarque s'applique à plusieurs des constructions qui suivent.

II. — Les perpendiculaires élevées aux axes en N et N' se coupent en un certain point ; si de ce point on abaisse une perpendiculaire sur OM, elle passe au centre de courbure (MANNHEIM, *Nouv. Ann.*, 1857, p. 322 et *Géom. desc.*, 1re éd., p. 177).

III. — Du point M on abaisse une perpendiculaire sur Ox ; du point où elle rencontre TN' on mène une parallèle à Ox qui passe au centre de courbure (MANNHEIM, loc. cit.).

IV. — Au point N on élève une perpendiculaire à Ox ; on projette le point où elle coupe TN' sur la normale ; on obtient ainsi le point C (MANNHEIM, loc. cit.).

V. — Par N' on mène une parallèle à Ox et l'on prend son point de rencontre avec T'N ; la projection de ce point sur la normale donne le centre de courbure (MANNHEIM, loc. cit.).

VI. — On prend le point d'intersection de TN' et T'N et on y élève une perpendiculaire à la droite qui le joint à M ; elle coupe la normale au point C (MANNHEIM, loc. cit.).

---

[1] Cette construction, généralement attribuée à MANNHEIM, est due à SCHELLBACH (M. d'OCAGNE, loc. cit.).

VII. — Si, par T et T′ on mène des perpendiculaires à la tangente jusqu'à leurs points de rencontre avec les parallèles aux axes menées par M, la droite qui joindra ces points de rencontre passera par le centre de courbure et par le centre de la conique (P. Serret, *Géom. de direction*, p. 482).

VIII. — Le centre de courbure est à l'intersection de la normale et de la perpendiculaire abaissée de O sur θM. (G. de Longchamps, *Géom. anal.,* 1^re^ éd., p. 409).

IX. — Du point O abaissons une perpendiculaire sur la tangente et du point N une perpendiculaire sur OM ; du point d'intersection de ces deux droites tirons une parallèle à Oy ; elle passe en C (Genty, *Nouv. Ann.*, 1883, p. 237-238).

X. — La droite qui joint les milieux des segments TN et T′N′ passe par le milieu du rayon de courbure (Neuberg, *Cours d'analy. infin.*, tome I, p. 222).

XI. — La perpendiculaire abaissée de T sur OM rencontre la normale en un point tel que sa distance au point N est égale au rayon de courbure (Cas particulier d'un théorème de Ribaucour, *Nouv. Ann.*, 1868, p. 171).

XII. — On prend le symétrique de T par rapport au milieu de MN ; la perpendiculaire abaissée de ce point sur OM passe au centre de courbure.

XIII. — En T on élève une perpendiculaire à la tangente ; le segment de cette perpendiculaire compris entre le point T et le point où elle coupe la perpendiculaire abaissée de N sur OM est égal au rayon de courbure.

XIV. — Elevons en M une perpendiculaire à OM et en T une perpendiculaire à MT ; la parallèle à Ox menée par le point de rencontre de ces deux droites passe au centre de courbure.

Supposons maintenant que la conique au lieu d'être définie par ses axes le soit par deux diamètres conjugués ; plusieurs des constructions précédentes subsistent, en particulier celles des n^os^ VII et XIV.

XV. — Soit OAB le triangle formé par les deux diamètres conjugués et la tangente en M. Les perpendiculaires élevées en A et B à la tangente coupent les perpendiculaires correspondantes abaissées de M sur OA et OB en deux points ;

la droite qui joint ces deux points passe au centre de courbure (*Nouv. Ann.*, 1915, p. 532; Cf. avec VII).

XVI. — Elevons en M et A les perpendiculaires à OM et MA ; elles se coupent en un point tel qu'en menant de ce point une perpendiculaire à OB elle passe en C (Cf. avec XIV).

XVII. — Projetons O sur la normale. Le centre de courbure est le point de rencontre des hauteurs du triangle qui a pour sommet ce point et pour base AB (NEUBERG, *Mathésis,* 1913, supplément).

Si OA et OB sont données non seulement en position, mais aussi en grandeur, on a, pour déterminer le centre de courbure en A, les constructions suivantes :

XVIII. — Sur OB prenons le point dont la distance à A est égale à OB ; élevons-y une perpendiculaire à la droite qui le joint à A. Elle coupe la normale en C [1].

XIX. — Si sur la normale en A on porte, de part et d'autre de ce point, deux segments égaux à OB, puis qu'on prenne sur cette normale le pied de la perpendiculaire qui lui est abaissée de O, le centre du cercle osculateur sera le conjugué harmonique de ce point par rapport aux extrémités des deux segments [2].

Nous n'avons envisagé jusqu'ici que le cas où la conique est définie, en dehors du point M et de la tangente MT, par ses axes (ou par deux diamètres conjugués). Si l'on introduit de nouveaux éléments, comme les foyers et les directrices, on arrive à d'autres constructions. D'ailleurs, la plupart de celles qui précèdent subsistent, si l'on fait jouer aux perpendiculaires, $F\varphi$, $F'\varphi$, aux rayons vecteurs le rôle des axes.

XX. — Les perpendiculaires $F\varphi$, $F'\varphi$ en F et F' aux rayons vecteurs divisent harmoniquement le rayon de courbure MC (*Mathesis,* 1893, p. 173).

XXI. — La perpendiculaire abaissée de t sur le diamètre

---

[1] Cela résulte de la formule, dite « formule de Dupin », $\rho = \frac{b'^2}{h}$, où b' désigne le demi-diamètre OB et h la distance du centre à la tangente en A. En réalité elle est due à MAC-LAURIN (P. SERRET, *Des méthodes en géométrie,* préface).

[2] Cette construction est due à Chasles. D'après MANNHEIM (*Principes* et *développements de géom. ciném.*, p. 33). Voir aussi (M. d'OCAGNE, *Nouv. Ann.*, 1880, p. 268).

OM coupe la normale en un point dont la distance au point n est égale au rayon de courbure (Cas particulier du théorème de Ribaucour).

XXII. — Par les points n et n' on mène les perpendiculaires à F'M et FM ; du point de rencontre de ces deux droites on abaisse une perpendiculaire sur OM ; elle passe au centre de courbure.

XXIII. — On élève au point M une perpendiculaire à OM et au point t une perpendiculaire à Mt ; la perpendiculaire abaissée du point de rencontre de ces deux droites sur le rayon vecteur MF passe par le centre de courbure.

XXIV. — La perpendiculaire à OM menée par le point n détermine sur la parallèle à la normale menée par t un segment qui, compté à partir de t, est égal au rayon de courbure.

XXV. — Les perpendiculaires menées par M et n au rayon vecteur MF et à la normale se coupent en un point tel que la perpendiculaire abaissée sur OM passe au centre de courbure.

Supposons maintenant que la conique soit définie par un point M, un foyer F et la directrice correspondante. La tangente en M est immédiatement connue, car le point t où elle coupe la directrice se trouve sur la perpendiculaire élevée en F au rayon vecteur MF.

XXVI. — Elever au point N une perpendiculaire à la normale ; par le point où elle rencontre le rayon vecteur mener à celui-ci une perpendiculaire ; elle passe au centre de courbure [1].

XXVII. — Mener par le point M une perpendiculaire à la directrice et par le point t une parallèle à la normale ; la droite qui va du point de rencontre de ces deux droites au foyer passe par le centre de courbure (MANNHEIM, loc. cit.).

XXVIII. — Au point M sur MF et au point T, où la tangente rencontre l'axe focal, sur MT, on élève des perpendiculaires ; on joint le point de rencontre de ces deux droites au foyer

[1] Cette construction, due au géomètre anglais KEILL (*Philosophical Transactions*, t. XXVI, p. 177) serait la plus anciennement connue. (D'après M. d'OCAGNE, loc. cit.). C'est aussi une des plus simples au point de vue graphique.

F; la droite ainsi obtenue passe en C (C. SERVAIS, *Nouv. Ann.*, 1899, p. 532).

XXIX. — Les parallèles menées par F et N à la normale et à la tangente se coupent en un point tel qu'en abaissant une perpendiculaire sur le rayon vecteur MF on obtient une droite passant en C.

XXX. — Par le point n on mène une parallèle à la tangente et par le point où elle rencontre le rayon vecteur MF une parallèle à l'axe focal; cette dernière droite coupe la normale au point C (*Nouv. Ann.*, 1915, p. 532).

Dans le cas de l'hyperbole, la présence des asymptotes introduit des éléments géométriques qui permettent d'obtenir de nouvelles constructions pour le centre de courbure.

XXXI. — Dans une hyperbole, au point où la tangente en M rencontre les asymptotes, on élève des perpendiculaires à celles-ci; elles rencontrent la normale en deux points dont le milieu est le centre de courbure de l'hyperbole au point M (MANNHEIM, loc. cit.).

XXXII. — Menons par le point M l'antiparallèle de la tangente par rapport aux asymptotes. Le cercle qui passe par les traces de cette droite et de la tangente, sur les asymptotes, est concentrique au cercle osculateur (P. SERRET, *Géom. de direction*, p. 485).

XXXIII. — Projetons orthogonalement le centre sur la normale; joignons le point ainsi obtenu à la trace de la tangente sur une asymptote; élevons-y ensuite une perpendiculaire à la droite qui joint ces deux points; elle passe au centre de courbure (NEUBERG, *Mathésis,* 1893, supplément; M. d'OCAGNE, *Nouv. Ann.*, 1902, p. 232 et 1915, p. 432, question 2257).

XXXIV. — Par la trace de la tangente sur une asymptote, menons une perpendiculaire à cette asymptote et une autre à OM; ces deux droites déterminent sur la normale un segment égal au rayon du cercle osculateur (Cas particulier du théorème de Ribaucour).

Appelons A et B les traces de la tangente sur les asymptotes; α et β les traces, sur la normale, des perpendiculaires en A et B aux asymptotes; ω le point de concours de ces perpendiculaires.

XXXV. — La perpendiculaire élevée en M à OM et celle élevée en A à MA, se coupent en un point tel que la droite qui le joint à C est perpendiculaire sur OA.

XXXVI. — Les perpendiculaires abaissées de M sur les asymptotes et les parallèles correspondantes, menées de B et A à la normale, se coupent en deux points en ligne droite avec C.

XXXVII. — Du point α abaissons une perpendiculaire sur OM et en A élevons une perpendiculaire sur la tangente. La projection, sur la normale, du point de rencontre de ces deux droites se fait au centre de courbure.

XXXVIII. — La droite qui joint les milieux des segments $A\alpha$ et $B\beta$ passe par le milieu du rayon de courbure.

Admettons maintenant que les données qui déterminent la conique soient le point M et la tangente MT et un triangle ABC, inscrit, circonscrit ou conjugué par rapport à la conique.

1° Triangle inscrit. Nous désignerons par α et γ les points où les côtés AB et CB coupent MT.

XXXIX. — Construisons le point où la perpendiculaire en α coupe la perpendiculaire en M à MC et le point analogue obtenu en remplaçant α par γ ; la droite qui joint ces deux points détache sur la normale un segment égal au diamètre du cercle osculateur en M (P. SERRET, *Géom. de direction,* p. 480).

XL. — Par les points α et γ menons des parallèles à MA et MC et projetons leur point de rencontre sur la normale. Le cercle qui passe par le point ainsi obtenu et par les points α et γ passe aussi par l'extrémité du diamètre du cercle osculateur opposée à M (MANNHEIM, *Nouv. Ann.*, 1903, p. 476).

XLI. — Du point α abaissons une perpendiculaire sur la conjuguée harmonique de $M\alpha$ par rapport à MA et MB et prenons le milieu du segment de cette perpendiculaire compris entre α et la normale ; opérons de même pour γ. La droite qui joint les milieux des deux segments passe par le milieu du rayon de courbure.

2° Triangle circonscrit. α, β, γ seront les traces sur la tangente des côtés BC, CA, AB.

XLII. — Par les points α et γ menons des parallèles à MC et MA et projetons leur point de rencontre sur la normale. Le cercle qui passe par le point ainsi obtenu et par les points α et γ passe aussi par le milieu du rayon de courbure (MANNHEIM, *Nouv. Ann.*, 1903, p. 478).

XLIII. — Soient α' et γ' les conjuguées harmoniques de M par rapport aux segments $\alpha\beta$ et $\gamma\beta$. Elevons en α' une perpendiculaire à Mα' et prenons son intersection avec la perpendiculaire élevée en M à MA ; opérons de même pour le point γ'. La droite qui joint les deux points ainsi obtenus passe au centre de courbure.

3° Triangle conjugué. α, β, γ auront la même signification que ci-dessus.

XLIV. — Elevons en γ la perpendiculaire à Mγ et prenons son intersection avec la perpendiculaire élevée en M à MA ; opérons de même pour α. La droite qui joint les deux points ainsi obtenus passe au centre de courbure.

XLV. — Abaissons de α une perpendiculaire sur MA et considérons le segment de cette droite compris entre α et la normale en M. Considérons le segment analogue issu de γ. La droite qui joint les milieux de ces segments passe par le milieu du rayon de courbure.

CONSTRUCTIONS DIVERSES.

XLVI. — Le cercle tangent extérieurement en M à la conique et orthogonal à son cercle orthoptique découpe sur la normale un segment égal au rayon de courbure (STEINER, *Nouv. Ann.*, 1849, p. 392).

XLVII. — Les perpendiculaires abaissées d'un point de la tangente en M sur la polaire de ce point et sur le diamètre OM, découpent sur la normale un segment égal au rayon de courbure (RIBAUCOUR, *Nouv. Ann.*, 1868, p. 171).

XLVIII. — On mène par M la symétrique de la tangente par rapport à l'ordonnée de ce point et par O la symétrique du diamètre OM ; la perpendiculaire élevée à la première à son point d'intersection avec la seconde passe au centre de courbure (DE LONGCHAMPS, *Nouv. Ann.*, 1880, p. 68).

XLIX. — On prend l'intersection de la droite joignant les projections du point M sur les axes avec la symétrique de la tangente par rapport à l'ordonnée de M; on y élève une perpendiculaire à la seconde droite; elle passe par le milieu du rayon de courbure (Cazamian, *Nouv. Ann.*, 1895, p. 367).

L. — On prend sur la tangente, à partir de M, une longueur égale au demi-diamètre conjugué de OM; par ce point on mène une parallèle à la normale sur laquelle on porte une longueur égale à la distance du centre à la tangente en M; on joint le point ainsi obtenu à M et on abaisse une perpendiculaire sur cette droite du point situé sur la tangente; elle coupe la normale au centre de courbure (P. J. Suchar, *Nouv. Ann.*, 1903, p. 403).

Expressions diverses du rayon de courbure. — Aux notations précédentes nous ajouterons les suivantes :

a, b, c, p, e auront la signification habituelle ;

a' et b' désigneront le demi-diamètre OM et son conjugué ;

r et r' les rayons vecteurs MF et MF′ ;

h la distance du centre à la tangente ;

n la portion de normale comprise entre le point M et l'axe focal ;

x, y et φ seront les coordonnées et l'anomalie excentrique de M ;

2θ l'angle FMF′ des rayons vecteurs

$$\rho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \frac{(a^4 - c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b} = \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab} ;$$

$$\rho = \frac{b'^3}{ab} = \frac{b'^2}{h} = \frac{a^2b^2}{h^3} ;$$

$$\rho = \frac{n^3}{p^2} = \frac{n^3a^2}{b^4} = \frac{n}{\cos^2\theta} ;$$

$$\rho = \frac{b^2}{a\cos^3\theta} = \frac{p}{\cos^3\theta} ;$$

$$\frac{2}{\rho\cos\theta} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} ; \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{a\cos\theta}{rr'} = \frac{h}{rr'} ,$$

$$\rho = \frac{\mathrm{MT}.\mathrm{MT}'}{h} = \frac{\mathrm{MN}.\mathrm{MN}'}{h} .$$