Question d'Analyse indéterminée.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Question d'Analyse indéterminée.

A propos d'un article de M. d'Ocagne.

Le problème suivant a été proposé ici[1] par M. M. d'Ocagne dans une Note intitulée « A propos d'une récréation mathématique » : *Former et dénombrer toutes les manières possibles de payer une somme de* n *francs avec* n *pièces de monnaie d'argent, prises parmi celles de 5 fr., 2 fr., 1 fr. et 50 cent., en ne tenant compte que des solutions complètes dans lesquelles interviennent des pièces de chaque espèce.*

Appelons x, y, z et t les nombres respectifs de pièces de 5 fr., 2 fr., 1 fr. et 50 cent. Il faut satisfaire en nombres entiers, supérieurs à zéro, aux équations suivantes :

$$x + y + z + t = n \ ,$$

$$5x + 2y + z + \frac{t}{2} = n \ .$$

Eliminons z par soustraction, il vient

$$8x + 2y = t \ , \tag{1}$$

et, par suite,

$$z = n - 3(3x + y) \ . \tag{2}$$

L'équation (1) donne toujours une valeur acceptable de t si $x \geqq 1$ et $y \geqq 1$.

L'équation (2) exige :

$$n > 3(3x + y)$$

ou

$$y < \frac{n}{3} - 3x$$

inégalité qui entraîne la suivante

$$x < \frac{n}{9} \ .$$

[1] *Ens. Math.*, N° de janvier 1916, p. 47.

Posons, avec M. d'Ocagne,

$$n = 9q + 3q' + r' \qquad (q' < 3 \ , \quad r' < 3)$$

et substituons cette valeur de n dans les inégalités précédentes; nous obtenons :

$$x < q + \frac{3q' + r'}{9}$$

$$y < 3q + q' - 3x + \frac{r'}{3} \ .$$

La règle de formation des solutions est analogue à celle qui a été énoncée par M. d'Ocagne pour le cas où la valeur zéro est admise dans les partitions.

A chacune des valeurs entières de x *telles que* $x < q + \frac{3q' + r'}{9}$ *on fait correspondre toutes les valeurs entières de* y *telles que* $y < 3q + q' - 3x + \frac{r'}{3}$. *Puis à chaque couple de valeurs de* x *et* y *ainsi formé on joint les valeurs de* z *et* t *données par les équations* (1) *et* (2).

Le problème revient à dénombrer tous les couples de valeurs de x et y ainsi définis.

Remarquons que dans le cas général, x pouvant être nul ainsi que y, nous aurons une solution pour $x = \frac{n}{9}$; tandis que dans le cas particulier qui nous occupe, il faut que x soit inférieur à cette valeur. x prendra q ou $q - 1$ valeurs suivant que l'expression $\frac{3q' + r'}{9}$ sera différente de zéro ou nulle. Il en est de même de y dont la valeur maximum, correspondant à chaque valeur de x, dépend de r'. Nous examinerons successivement ces trois hypothèses : $r' \neq 0$; $r' = 0, \ q' \neq 0$; $r' = 0, \ q' = 0$.

I. $r' \neq 0$. Nous aurons q valeurs de x, savoir : 1, 2, ... q, et à chacune de ces valeurs correspondent $3q + q' - 3x$ valeurs de y.

On peut former le tableau :

$$x = 1 \qquad y = 1 \ . \ 2 \ \ldots \ 3(q - 1) + q'$$

$$x = 2 \qquad y = 1 \ , \ 2 \ \ldots \ 3(q - 2) + q'$$

. . . .

$$x = q \qquad y = 1 \ , \ 2 \ , \ \ldots \ q'$$

Les nombres des couples figurant dans chacune des q lignes sont respectivement :

$$3(q-1)+q'\ ,$$
$$3(q-2)+q'\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$q'\ .$$

Leur somme s'obtient aisément :

$$N' = 3[(q-1)+(q-2)+\ldots+1]+qq'$$
$$= \frac{3q(q-1)}{2}+qq' = \frac{q(3q+2q'-3)}{2}\ . \qquad \text{(A)}$$

II. $r'=0$, $q'\neq 0$. x prendra encore q valeurs : $1, 2, \ldots q$; mais nous n'aurons plus que $3q+q'-3x-1$ valeurs de y pour chaque valeur de x. Le nombre des couples de solutions s'obtient donc en remplaçant q' par $q'-1$ dans la formule (A).

$$N' = \frac{q(3q+2q'-5)}{2}\ . \qquad \text{(B)}$$

III. $r'=0$, $q'=0$. Dans ce cas x ne prend que $q-1$ valeurs, $1, 2 \ldots q-1$, et à chaque valeur de x correspondent $3q-3x-1$ valeurs de y. Formons le tableau :

$$\begin{array}{ll}
x=1 & y=1\,,\ 2\ \ldots\ 3(q-1)-1\ , \\
x=2 & y=1\,,\ 2\ \ldots\ 3(q-2)-1\ , \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
x=q-1 & y=1\,,\ \ldots\ 3\qquad\quad -1\ ,
\end{array}$$

il contient $q-1$ lignes, la somme des couples de solutions qui figurent dans chacune de ces lignes est

$$N' = 3[(q-1)+(q-2)+\ldots+1]-(q-1)\ ,$$
$$= \frac{3q(q-1)}{2}-(q-1) = \frac{(q-1)(3q-2)}{2}\ . \qquad \text{(C)}$$

Les formules (A), (B), (C) donnent, suivant la forme de n, le nombre des solutions complètes du problème.

Appelons N le nombre total de solutions, on sait que[1]

[1] *Ens. Math.*, 1916, p. 46.

$$N = \frac{(q+1)(3q+2q'-2)}{2}\ . \qquad \text{(D)}$$

Pour une même valeur de n on a évidemment $N' < N$ et si n

croît indéfiniment, N et N′ ont pour limite l'infini ; mais le rapport $\frac{N'}{N}$ a pour limite 1 lorsque n croît au delà de toute valeur. On voit donc que le nombre de solutions complètes croît plus rapidement que le nombre de solutions incomplètes. Pour de très grandes valeurs de n les solutions complètes composent la presque totalité des solutions. Ainsi pour $n = 100.000$; $q = 11.111$, $r' = 1$. Appliquons successivement les formules (D) et (A)

$$N = \frac{11112 \times 33335}{2} = 185.209.260$$

$$N' = \frac{11111 \times 33330}{2} = 185.164.815\ .$$

Le rapport $\frac{N'}{N}$ exprime la probabilité pour que les quatre espèces de pièces interviennent dans le paiement.

Mai 1916.

H. Barolet.
Prisonnier de guerre français,
Hohen-Asperg (Württ.).

CHRONIQUE

Concours pour le VI[e] Congrès international des mathématiciens.

Conformément au souhait exprimé de différents côtés et vu la situation générale actuelle, S. M. le roi Gustave V a décidé que le délai fixé pour la remise des travaux qui sont présentés en vue de concourir pour le prix de mathématiques fondé par S. M. sera prolongé du 31 octobre 1916 au 31 octobre 1917.

G. Mittag-Leffler.

On sait qu'il s'agit d'un prix de 3000 couronnes offert par S. M. le roi de Suède à l'auteur du meilleur travail apportant une contribution importante à la théorie des fonctions analytiques (v. l'*Ens. math.* du 15 sept. 1913, p. 415).

La Rédaction.