III

Les applications de (9) qui suivent résultent de l'introduction d'un paramètre. Je commence par le cas le plus simple :

$$y' - ay = x^{\alpha-1} . \varphi(x) \; , \tag{10}$$

$$\left| e^{-ax} . V(x) \right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} e^{-at} . t^{\alpha-1} . \varphi(t) \, dt \; . \tag{11}$$

Ici $V(x)$ est représenté par la série

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha} \; ,$$

si α n'est ni nul ni entier négatif, et si en outre $R(\alpha) > 0$, on a

$$e^{-ax} . V(x) = \int_{0}^{x} e^{-at} . t^{\alpha-1} . \varphi(t) \, dt \; . \tag{12}$$

La condition de convergence étant remplie pour $\alpha = 1$, on obtient pour

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \; ,$$

la formule

$$e^{-ax} . V(x) - V(0) = \int_{0}^{x} e^{-at} . \varphi(t) \, dt \; . \tag{13}$$

La relation entre $V(x)$ et $\varphi(x)$ se calcule en employant dans (10) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} \; ,$$

ce qui donne :

$$x^{\alpha-1} . \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{n+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+\alpha) A_n - a A_{n-1}] x^{n+\alpha-1} \; ,$$

ou

$$D_n = (n+\alpha) A_n - a A_{n-1} \; .$$

Pour introduire le paramètre mentionné je pose maintenant

$$A_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} z^\lambda ,$$

ce qui entraîne que les $a_{n\lambda}$ et z doivent être choisis conformément à la condition que la série $\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$ soit convergente.

En faisant usage du tableau suivant :

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	*
1	0	$\dfrac{a a_{01}}{\alpha + 1}$	$\dfrac{a a_{02}}{\alpha + 1}$	*
2	0	0	$\dfrac{a^2 a_{02}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$	*
3	*	*	*	*

on trouve

$$A_0 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda ,$$

. . . .

$$A_n = \frac{a^n}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} \sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda ,$$

$$D_0 = \alpha . A_0 ,$$

. . . .

$$D_n = \frac{-a^n . a_{0,n-1} . z^{n-1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)} ,$$

et la formule (12) devient

$$e^{-ax} . (ax)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \left[\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda\right]$$

$$= \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda\right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha-1} d(at)$$

$$- \int_0^x e^{-at} (at)^\alpha \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \right\} d(at) . \qquad (14)$$

Elle est valable pour toutes les valeurs des a_{0n} et z telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = \alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} - ax \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n}(azx)^n}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} \tag{15}$$

soit par rapport à x une série convergente. Par suite $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ est nécessairement une série à rayon de convergence non nul et z une valeur pour laquelle elle converge. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n}(zx)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)}$ est une série toujours convergente. Pourtant je distingue *deux cas :*

Premier cas. — Soit $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ une série à rayon de convergence non nul et z une valeur fixe pour laquelle elle converge. A chaque quantité positive ε si petite qu'on veut, il est possible de déterminer l'indice ν tel qu'on a pour $n > \nu$

$$\left| \sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right| < \varepsilon .$$

Il est facile d'obtenir la formule

$$(ax)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} = e^{ax} - \frac{(ax)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}.\,dt}{\left(1+\frac{t}{ax}\right)^{1-\alpha}} ,$$

$$= e^{ax} - \frac{a^{\alpha}.\,x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+1-\alpha) \frac{(-1)^n}{(ax)^n} ,$$

par exemple en calculant (12) pour $\varphi(x) = 1$. Donc le premier membre de (14) peut s'écrire

$$\frac{(ax)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \left[\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right]}{(ax)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} + \frac{(ax)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}.\,dt}{\left(1+\frac{t}{ax}\right)^{1-\alpha}}} = L .$$

Cette forme conduit aisément à la valeur limite :

$$\lim_{x=\infty} \mathrm{L} = \lim_{n=\infty} \left(\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right) = 0 .$$

L'équation (14) est valable pour chaque valeur z, pour laquelle $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ est convergente et pour chaque valeur x qui n'est pas point singulier de l'équation différentielle (10), c'est-à-dire pour chaque valeur finie x, $x = \infty$ étant le seul point singulier. Donc, le point $x = \infty$ étant atteint tel que $\mathrm{R}(ax) > 0$, on conclut de

$$\lim_{x=\infty} \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at)$$

$$= \left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right] \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x=\infty} \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha-1} d(at) - \lim_{x=\infty} \mathrm{L} ,$$

le Théorème : L'égalité

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at) ; \qquad \mathrm{R}(\alpha) > 0 \qquad (16)$$

subsiste pour chaque valeur z pour laquelle $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ est convergente. L'intégrale définie dans le second membre converge au moins pour les mêmes valeurs de z.

Dans son mémoire « Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène », *Acta Math.*, T. 29, M. G. Mittag-Leffler a démontré trois théorèmes (A, B, C du § 1) se rapportant à des intégrales de la forme de l'intégrale définie dans (16). Il est facile d'étendre en suivant le même ordre d'idée les autres résultats des §§ 1 et 4 du mémoire de M. Mittag-Leffler à cette nouvelle intégrale. On est ainsi conduit au

Théorème : L'intégrale

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^\alpha \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n}(zt)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \right\} dt$$

possède par rapport à z une étoile de convergence $B^{(1)}$. L'égalité

$$FB^{(1)}(z) = f(z)$$

a lieu partout à l'intérieur de $B^{(1)}$.

Cette étoile de convergence que M. Mittag-Leffler, dans le Tome 29 des *Acta Math.*, désigne par $B^{(1)}$ est identique au polygone de sommabilité de M. E. Borel.

Par le même procédé on obtient pour $\alpha = 1$ les formules (14) et (16) en partant de (13). Une intégration par parties conduit alors à la formule (16) dans laquelle on a fait $\alpha = 0$. C'est la formule célèbre de Laplace-Abel-Borel.

Second cas. — Soit $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$ une série qui représente une fonction $f(z)$ asymptotiquement. C'est une série divergente pour chaque valeur finie z. Les considérations faites dans le premier cas seront en défaut, mais c'est M. Borel qui a remarqué que l'intégrale Laplace-Abel peut pourtant être convergente. M. Borel[1] introduit par définition la valeur de cette intégrale définie comme somme de la série divergente. Et M. G. H. Hardy[2] a formulé à cet égard son « principle » : « If two limiting processes performed in a definite order on a function of two variables lead to a definite value X, but when performed in reverse order lead to a meaningless expression Y, we may agree to interpret Y as meaning X. »

Il est curieux[3] que personne ne semble avoir remarqué la possibilité d'une démonstration exacte. Dans le cas présent il n'est pas nécessaire d'avoir recours à une nouvelle définition ou à un nouveau principe. Mais les séries conver-

---

[1] Voir p. ex. ses *Leçons sur les séries divergentes*, Gauthier-Villars, 1901.

[2] *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, 19, p. 297, 1904.

[3] Comparez la critique sévère de M. G. Mittag-Leffler, « Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe », Congrès intern. des mathématiciens, Rome, 1908, Atti, 1, et *Bull. Americ. Math. Soc.*, sér. 2. vol. XIV (1908).

gentes et les séries asymptotiques dans le sens de Poincaré sont jusqu'à ce jour les seules qui ont un sens arithmétique défini. La supposition faite signifie, d'après la définition introduite par Poincaré : il subsiste pour chaque entier m l'équation

$$\lim_{z=\infty} z^m \left[f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right] = 0 .$$

Donc on écrit l'équation (14) de la manière suivante :

$$z^m . e^{-ax} . x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n \left[\sum_{\lambda=n}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right]}{\Gamma(\alpha+n+1)}$$

$$= - z^m \left\{ f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right\} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-at} . t^{\alpha-1} dt$$

$$- z^m \left\{ \frac{-f(z)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-at} . t^{\alpha-1} dt + \int_0^x e^{-at} . t^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_{0n} a^{n+1} \left(\frac{t}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \right] dt \right\} ,$$

ce qui est une équation exacte. En passant à la limite $x = +\infty$, on trouve pour $R(a) > 0$ et pour chaque valeur finie de z, excepté $z = 0$,

$$0 = - z^m \left[f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right]$$

$$- z^m \left\{ - f(z) + \int_0^\infty e^{-at} (at)^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_{0n} \left(\frac{at}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \right] d(at) \right\} .$$

Or il subsiste pour chaque entier m l'équation

$$\lim_{z=\infty} z^m \left\{ f(z) - \int_0^\infty e^{-at} (at)^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_{0n} \left(\frac{at}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \right] d(at) \right\} = 0 , \quad (17)$$

et c'est l'expression en formule du fait que l'intégrale

$$K = \int_0^\infty e^{-at} (at)^\alpha \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} \left(\frac{at}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \right] d(at) \quad (18)$$

représente asymptotiquement la fonction $f(z)$ de même que la série $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$ de laquelle on est parti.

Mais il est possible que cette intégrale K converge et représente une fonction analytique $K(z)$ dans le sens ordinaire. Donc on conclut

$$f(z) = K(z) + E \ ,$$

où E est une fonction représentée asymptotiquement par un développement identiquement nul. Et parce que dans les calculs faits on n'a pas introduit des parties étrangères à $f(z)$, l'équation

$$f(z) = K(z) \tag{19}$$

sera exacte dans un grand nombre de cas.

La fonction $f(z)$ est représentée asymptotiquement par la série $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$ lorsque $z = r \,.\, e^{i\psi}$ croît indéfiniment suivant un rayon déterminé. Pour les séries asymptotiques dont on fait usage dans la théorie des équations différentielles, une telle égalité asymptotique

$$f(z) \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$$

r tendant vers l'infini, est unique pour tous les arguments ψ compris dans un certain angle

$$\theta_1 < \psi = \arg z < \theta_2 \ .$$

Donc l'équation (17) aura lieu dans le même angle.

La série sous le signe d'intégration

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{0\lambda}\left(\frac{at}{z}\right)^\lambda}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} = g\left(\frac{at}{z}\right) \tag{20}$$

est convergente ou représente une fonction $g\left(\frac{at}{z}\right)$ asymptotiquement.

Je suppose, faisant $\frac{at}{z} = u = \rho \,.\, e^{\varphi i}$, que la série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{0\lambda} u^\lambda}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}$$

soit convergente et que la fonction $g(u)$ qu'elle représente soit holomorphe dans l'angle

$$0 \leqq \rho \leqq N \,, \qquad \text{(N nombre positif arbitrairement grand)}$$
$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \,.$$

Ainsi $u = \infty$ est, pour $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ le seul point singulier possible.

En outre, je suppose que, $u = \infty$ étant singulier, $g(u)$ soit tel que l'intégrale (18) converge pour

$$\varphi_1 < \arg u < \varphi_2 \,,$$

ou, t ayant l'argument 0,

$$\varphi_1 < \arg a - \arg z < \varphi_2 \,,$$
$$\arg a - \varphi_2 < \arg z < \arg a - \varphi_1 \,.$$

Il résulte que l'intégrale (18) converge si $z = r \,.\, e^{i\psi}$ est une valeur quelconque dans l'angle

$$\arg a - \varphi_2 < \psi < \arg a - \varphi_1 \,,$$

$\varepsilon \leqq r \leqq \infty$ quelque petit que soit le nombre positif ε. Dans cet angle l'intégrale (18) représente une fonction analytique holomorphe.

Dans le cas le plus simple et très important $g(u)$ est fonction rationnelle, holomorphe pour $u = \infty$. Sous cette condition l'intégrale (18) est convergente dans tout le plan de la variable z sauf peut-être sur quelques rayons limitant un nombre fini d'angles. Les fonctions qu'elle représente, holomorphes pour tout point z intérieur à ces différents angles sont en général des fonctions analytiques différentes.

L'exemple suivant montre le grand avantage que présentent les formules (16) et (19).

On sait par la méthode Poincaré-Horn, que l'équation différentielle

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$$

admet un système fondamental qui, pour toutes les valeurs finies de n réelles ou complexes, est représenté asymptotiquement par les séries

$$y_1(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{ix}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda + n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)} \frac{1}{(2ix)^{\lambda}},$$

$$y_2(x) = \frac{e^{-ix}}{\sqrt{-ix}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda + n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)} \frac{1}{(-2ix)^{\lambda}},$$

lorsque $r = |x|$ augmente indéfiniment, si

pour la fonction $y_1(x)$: $\quad -\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$,

» » $y_2(x)$: $\quad +\delta < \arg x < 3\pi - \delta$,

le nombre positif δ étant aussi petit qu'on le veut.

Je pose $a = 1$, $\alpha = n - \frac{1}{2}$ et à cause de la formule

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)} (-u)^{\lambda} = (1 + u)^{n - \frac{1}{2}};$$

(16) donne

$$y_\varepsilon(x) = \frac{e^{-(-1)^\varepsilon . ix} . e^{(-1)^\varepsilon \frac{\pi}{4} i}}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-t} . t^{n-\frac{1}{2}} \frac{\left[1 + (-1)^\varepsilon \frac{t}{2ix}\right]^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} dt,$$

$$(\varepsilon = 1, 2)$$

d'où

$$y_1(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n . \sqrt{2} . e^{\frac{\pi i}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{-i}^{\infty} e^{-xu}(1 + u^2)^{n-\frac{1}{2}} du,$$

$$y_2(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n . \sqrt{2} . e^{-\frac{\pi i}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{+i}^{\infty} e^{-xu}(1 + u^2)^{n-\frac{1}{2}} du.$$

Ici le chemin d'intégration doit atteindre l'infini tel que $R(xu) > 0$.

Enfin les relations

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_1(x) = \mathrm{H}_n^{(1)}(x) ,$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_2(x) = \mathrm{H}_n^{(2)}(x) ,$$

montrent qu'on est arrivé à la représentation par intégrales définies des fonctions cylindriques de troisième espèce[1] (Hankel).

On voit que la formule (16) et d'autres qu'on obtient par le même procédé fournissent un moyen indispensable pour des calculs effectifs, notamment pour les séries dérivant des équations différentielles linéaires du type hypergéométrique.

IV

Je reprends les considérations du commencement de III, en disposant des constantes $a_{n\lambda}$ comme il suit

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$\frac{a_{00}}{\alpha + 1}$	0	0	0 .
2	$\frac{a \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	$\frac{a \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	0	0 .
3	$\frac{a^2 \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{02}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	0 .

Il en résulte

$$\mathrm{A}_0 = 0 ,$$

. . . .

$$\mathrm{A}_n = \frac{a^{n-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{0\mu} z^{\mu}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n)} ,$$

$$\mathrm{D}_0 = 0 ,$$

. . . .

$$\mathrm{D}_n = \frac{a^{n-1} \cdot a_{0,n-1} \cdot z^{n-1}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n)} ,$$

[1] N. Nielsen. *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen.*