

# V

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

V

Comme dernière application de la méthode exposée je reviens à l'équation (3) pour  $\alpha = 1$ .

$$x \frac{dy}{dx} - xp(x)y = x \cdot \varphi(x) , \tag{22}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n ,$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m x^m$$

$p(x)$  et  $\varphi(x)$  étant des séries de Taylor à rayon de convergence non nul. L'intégrale de l'équation sans second membre est

$$y_1(x) = e^{\int_0^x p(\xi) d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n , \tag{4}$$

et il reste à calculer les différentes parties de la formule (9) pour le cas présent.

$$\left| \frac{V(x)}{y_1(x)} \right|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x \frac{\varphi(t) dt}{y_1(t)} .$$

Le théorème du second cas dans I montre qu'on aura

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n ,$$

et l'on obtient

$$D_n = (n + 1)A_{n+1} - \sum_{\lambda=0}^n b_{n-\lambda} \cdot A_\lambda .$$

Je dispose des  $A_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} z^\lambda$  de la manière suivante :

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$E(1) a_0$	0	0	0 .
2	$E(2) a_0$	$E(2) a_1$	0	0 .
3	$E(3) a_0$	$E(3) a_1$	$E(3) a_2$	0 .

d'où

$$A_0 = 0 ,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n = E(n) \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r ,$$

et par suite

$$D_n = (n+1) E(n+1) \sum_{r=0}^n a_r z^r - \sum_{\lambda=0}^n b_{n-\lambda} E(\lambda) \left\{ \sum_{r=0}^{\lambda-1} a_r z^r \right\}$$

$$= (n+1) E(n+1) a_n z^n + \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \left[ (n+1) E(n+1) - \sum_{\mu=0}^{n-1-r} b_{\mu} E(n-\mu) \right]$$

$$= \sum_{r=0}^n d_{n,r} a_r z^r .$$

Donc on est arrivé à l'équation

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left( \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n} = \int_0^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \dots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} . \quad (23)$$

Pour le moment je considère cette formule seulement en supposant  $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n$  fonction entière transcendante.

Dans ce cas M. Mittag-Leffler<sup>1</sup> donne pour l'expression à gauche dans (23) la valeur

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{y_1(x)} \int_S \frac{F(z \cdot y)}{y-1} \cdot y_1\left(\frac{x}{y}\right) dy . \quad (24)$$

où

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r .$$

Le contour S doit être la limite d'une surface simplement

<sup>1</sup> Voir : Sur la représentation, etc., *Acta Math.*, T. 29, p. 170.

connexe pour laquelle la fonction  $F(z, y)$  reste régulière; il doit être parcouru dans le sens direct et embrasser les deux points  $y = 0, y = 1$ .

En discutant l'intégrale curviligne M. G. Mittag-Leffler a démontré que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left( \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n} = FA(z) \tag{25}$$

est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A et représente la branche fonctionnelle  $FA(z)$  partout à l'intérieur de cette étoile, si la fonction entière

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n$  est choisie telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y_1(x \cdot u)}{y_1(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\int_0^{x \cdot u} p(\xi) d\xi - \int_0^x p(\xi) d\xi} = 0$$

d'une manière uniforme tant que  $u$  appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel positif compris entre  $x = 1$  et l'infini. Cette condition est satisfaite par toute fonction entière

$$\int_0^x p(\xi) d\xi = T(x) \tag{26}$$

possédant la propriété :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r \cdot e^{i\varphi}) = 0$$

uniformément pour

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon ,$$

$\varepsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r \cdot e^{i\varphi}) = \infty \quad \text{pour} \quad \varphi = 0 .$$

En outre M. Mittag-Leffler démontre que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left( \sum_{r=0}^{n-1} |a_r z^r| \right)$$

est pour toute valeur de  $z$  une série toujours convergente par rapport à  $x$ . Elle est,  $x$  étant fixé, uniformément convergente pour un domaine quelconque de la variable  $z$ .  $p(x) = T'(x)$  est fonction entière transcendante, donc  $\varphi(x) = V'(x) - p(x).V(x)$  est une série de  $x$  et de  $z$  qui partage avec  $V(x)$  les deux propriétés exposées il y a un moment. La fonction entière transcendante  $y_1(x) = e^{T(x)}$  ne s'annule pour aucune valeur finie  $x$  et par suite l'intégrale dans (23) a un sens pour chaque valeur finie  $x$ .

En passant à la limite on est conduit à cause de (25) à la formule

$$\int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \dots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} = \text{FA}(z). \quad (27)$$

L'intégrale converge uniformément pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A. C'est une généralisation de l'intégrale Laplace-Abel, de l'intégrale de M. Mittag-Leffler et une formule analogue à la troisième des formules (125) p. 177 démontrées par M. Mittag-Leffler (*Acta Math.* t. 29).

Je termine par la remarque que les applications de la méthode exposée peuvent être augmentées considérablement, car elle contient trois éléments arbitraires: 1. l'équation différentielle de liaison d'ordre quelconque; 2. le point  $x_0$ , qui peut être point singulier de cette équation différentielle en lequel toutes ses intégrales sont régulières ou point singulier en lequel les intégrales sont irrégulières; 3. le chemin d'intégration.

D'autres résultats que j'ai obtenus paraîtront dans la *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*<sup>1</sup>.

Küsnacht (Zürich), octobre 1916.

<sup>1</sup> « Neue Entwicklungen über die Abel'sche Integralumkehrungsformel. » Jahrgang 62 (1917).