Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES OBTENUES COMME LIMITES DE FONCTIONS MULTIFORMES

Autor: Pompeiu, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17320

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR
CERTAINES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES OBTENUES COMME LIMITES DE FONCTIONS MULTIFORMES

PAR

D. Pompeiu (Bucarest).

---

1. — On connaît le procédé, aujourd'hui classique, pour définir sur un segment rectiligne un ensemble de points : parfait et partout non dense.

On enlève du segment donné (a, b) les points intérieurs appartenant à une suite dénombrable d'intervalles (a_k, b_k), ces intervalles étant assujettis aux deux conditions suivantes :

1° Deux quelconques de ces intervalles n'empiètent jamais l'un sur l'autre et n'ont aucune extrémité commune ;

2° Dans toute portion de (a, b) il y a des points appartenant à des segments (a_k, b_k).

Il est clair que

$$\Sigma(b_k - a_k) \leqq b - a .$$

Dans le cas de l'égalité l'ensemble obtenu est de longueur nulle ; dans l'autre cas il est de longueur finie.

2. — Parallèlement à cette opération qui donne l'ensemble parfait partout non dense, considérons une fonction non uniforme $F(z)$ admettant les points a et b comme points *critiques* et supposons qu'il soit possible de trouver une autre fonction $F_1(z)$ admettant a_1 et b_1 comme points critiques, et telle que la différence

$$\Phi_1(z) = F(z) - F_1(z)$$

n'admette plus $(a_1 b_1)$ comme coupure, $\Phi_1(z)$ ayant deux coupures aa_1 et bb_1.

Supposons maintenant que l'on puisse trouver $F_2(z)$ de façon que retranchant $F_2(z)$ de $\Phi_1(z)$ la fonction

$$\Phi_2(z) = F(z) - F_1(z) - F_2(z)$$

soit *uniforme* le long de $a_2 b_2$, les points a_2 et b_2 étant des points critiques pour $F_2(z)$. — Et ainsi de suite.

On serait ainsi conduit à une série

$$\Phi(z) = F(z) - \Sigma F_k(z)$$

définissant une fonction analytique uniforme possédant des points singuliers formant un ensemble parfait non dense.

Dans ce qui suit nous nous proposons de développer ces indications générales et de préciser la méthode qui en découle.

3. — Soit $F(z)$ une fonction analytique possédant deux points *critiques* a et b. Nous écrirons

$$F(z, a, b)$$

pour mettre en évidence les points critiques ; il est clair qu'en dehors des points d'une coupure (a, b) (qu'on peut supposer *rectiligne*) une quelconque des déterminations de F est uniforme : autrement le point à l'infini serait lui-même critique, ce qui n'est pas dans nos hypothèses.

Cela posé, soit

$$G(z, a_1, b_1)$$

une autre fonction analytique non uniforme, possédant les points critiques a_1 et b_1 ; je suppose, pour simplifier l'exposition, que a_1 et b_1 sont deux points situés sur le segment ab, de façon que

$$|a_1 - b_1| < |a - b| .$$

Cela précisé, je suppose que la fonction

$$H = F - G$$

(ou, d'une façon plus claire, toute détermination de cette

fonction) est uniforme en dehors des segments rectilignes aa_1 et bb_1.

En d'autres termes nous admettons que : en retranchant de F (qui possède la coupure ab) la fonction G (qui possède la coupure $a_1 b_1$) on *neutralise* la portion $a_1 b_1$ de la coupure ab. Nous nous proposons, en prenant ce fait analytique comme prémisse, de chercher la forme générale des fonctions F et G.

4. — Pour cela partons d'un point ζ, situé sur ab, avec une certaine détermination F_0 de F et tournons autour du point critique a, dans le sens direct, pour revenir au même point ζ : nous arriverons avec une autre détermination F_1 de F :

La différence

$$F_1(\zeta) - F_0(\zeta) = f(\zeta) \tag{1}$$

n'est pas nulle, en général, lorsque ζ décrit le segment ab : c'est d'ailleurs une fonction analytique qui peut être prolongée en dehors du segment ab.

Un raisonnement analogue nous conduit à une fonction

$$G_1(\zeta) - G_0(\zeta) = g(\zeta) \tag{2}$$

définie sur le segment ab et qui est aussi analytique et prolongeable en dehors de ab.

Il est clair que le fait analytique qui constitue notre hypothèse se traduit par la condition

$$g(\zeta) \equiv f(\zeta) \quad \text{(à une condition uniforme près)} . \tag{3}$$

Je dis que cette condition entraîne la conclusion suivante : f(z) *est nécessairement une fonction uniforme.*

En effet, envisageons la relation (1) par laquelle est définie $f(z)$.

Si cette fonction est non uniforme elle ne peut admettre d'autres points critiques que a et b, d'après nos hypothèses relatives à F.

De la même manière raisonnant sur la relation (2) nous voyons que $g(z)$ ne peut admettre d'autres points critiques que a_1 et b_1.

Mais dans ces conditions, on le voit clairement, la relation (3) ne peut subsister que si $f(z) \equiv g(z)$ est une fonction *uniforme*.

C'est la conclusion à laquelle nous voulions arriver. Mais cette conclusion nous conduit au *problème général* suivant :

Soit $F(z)$ une fonction non uniforme ayant deux points critiques a et b : elle est, par suite, uniforme le long de tout contour fermé contenant a et b dans son intérieur (autrement le point à l'infini serait aussi *critique*).

Joignons a et b par un segment rectiligne $\overline{ab}$. Lorsque l'on part d'un point ζ, situé sur $\overline{ab}$ avec une certaine détermination $F_0(z)$ de $F(z)$ et que l'on tourne autour du point a on revient en ζ avec une valeur $F_1(\zeta)$ différente de la valeur initiale $F_0(\zeta)$: c'est en quoi consiste la non-uniformité autour de a.

Si maintenant on considère la différence

$$f(\zeta) = F_1(\zeta) - F_0(\zeta)$$

pour tous les points ζ du segment ab on définit ainsi une fonction $f(\zeta)$ qui est *régulière* en tout point ζ autre que a et b, et par suite *prolongeable* en dehors du segment ab.

Maintenant deux cas peuvent se présenter :

1° $f(z)$ est une fonction *uniforme* ;

2° $f(z)$ est une fonction *non uniforme*.

Nous ne nous occuperons que du premier cas et nous nous proposons de trouver la forme générale de $F(z)$.

5. — Prenons, pour cela, la fonction

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} f(z) \log \frac{z-a}{z-b}$$

et considérons la différence

$$u(z) = F(z) - G(z) \ .$$

Partons du point ζ avec la valeur

$$u_0(z) = F_0(z) - G_0(z)$$

$G_0(z)$ étant une, quelconque, des déterminations de $G(z)$: on voit qu'en tournant autour de a on revient au point de départ avec la même valeur u_0. Donc $u(z)$ est une fonction uniforme.

Ainsi

$$F(z) = u(z) + \frac{1}{2\pi i} f(z) \log \frac{z-a}{z-b}$$

qui est la forme générale de $F(z)$.

6. — Maintenant, pour simplifier et considérer un cas précis, supposons

$$u(z) \equiv 0 \ , \qquad f(z) \equiv 1 \ ,$$

alors

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{z-a}{z-b} \ ,$$

que nous écrivons aussi sous la forme $F(z, a, b)$ pour mettre en évidence les points critiques.

Soit maintenant $F(z, a_1, b_1)$ une fonction de même forme mais dont les points critiques sont a_1 et b_1 situés dans l'intérieur du segment $\overline{ab}$. Si je forme la différence

$$F(z, a, b) - F(z, a_1, b_1) \ ,$$

j'observe que cette fonction est uniforme en dehors des coupures $\overline{aa_1}$ et $\overline{bb_1}$. Donc la soustraction de $F(z, a_1, b_1)$ a eu comme effet de neutraliser la portion $\overline{a_1 b_1}$ de la coupure primitive.

Cette propriété peut être utilisée pour obtenir une fonction uniforme intéressante comme somme d'une *série* de fonctions non uniformes.

7. — En effet, sur un intervalle (a, b) découpons une suite dénombrable, d'intervalles (a_n, b_n) de manière à définir sur ab un ensemble parfait, partout non dense.

Cela fait, considérons la série

$$\varphi(z) = \log \frac{z-b}{z-a} - \sum_1^{\infty} \log \frac{z-b_n}{z-a_n} \ ,$$

qui est convergente en dehors de ab, comme on peut facilement l'établir.

On démontre aisément que tous les points a_n et b_n sont des points *singuliers* pour $\varphi(z)$.

En effet, la série étant absolument et uniformément convergente dans tout domaine fermé ne contenant aucun des points a_n ou b_n, on peut dériver terme à terme et représenter $\varphi'(z)$ par la série

$$\varphi'(z) = \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) - \sum\left(\frac{1}{z-b_n} - \frac{1}{z-a_n}\right).$$

Or, pour cette série tous les points a_n et b_n sont singuliers, comme on le voit tout de suite. Donc il en est de même pour la fonction primitive $\varphi(z)$.

Ainsi la fonction $\varphi(z)$ est *uniforme* et admet un ensemble parfait et non dense de points singuliers, cette fonction étant obtenue comme somme d'une série de fonctions non uniformes.

8. — Reprenons la série qui définit $\varphi(z)$ et cherchons une limite supérieure des modules des termes de cette série pour une valeur donnée de la variable z.

Prenons la fonction

$$k(z) = \log \frac{z-a_1}{z-a_2},$$

on a

$$k(z) = \log \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \qquad \begin{pmatrix} z - a_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z - a_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$$

et l'on peut supposer

$$|\theta_1 - \theta_2| < \pi,$$

si l'on prend la détermination de $k(z)$ qui s'annule à l'infini.

En écrivant $k(z)$ sous la forme

$$k(z) = \log(z - a_1) - \log(z - a_2)$$

et appliquant le théorème des accroissements finis on arrive à

$$|k(z)| \leq \frac{|a_1 - a_2|}{\delta} \tag{4}$$

δ étant la distance du point z au segment rectiligne ab.

L'inégalité ci-dessus pouvant d'ailleurs s'établir aussi en

écrivant $k(z)$ sous la forme d'une intégrale définie où z entre comme paramètre.

9. — La relation (4) va nous permettre d'établir un résultat intéressant, relatif à la fonction $\varphi(z)$ du n° 7.

Soit ab l'intervalle primitif et $a_1 b_1$ le premier intervalle d'uniformité obtenu en retranchant $F(z, a_1, b_1)$ de $F(z, a, b)$. On a

$$F(z, a, b) - F(z, a_1, b_1) = \log \frac{z-b}{z-a} - \log \frac{z-b_1}{z-a_1}.$$

Mais le second membre peut s'écrire aussi

$$\varphi_1(z) = \log \frac{z-a_1}{z-a} + \log \frac{z-b}{z-b_1},$$

et sous cette forme en appliquant la relation (4) nous trouvons

$$|\varphi_1(z)| < \frac{|a-a_1|}{\alpha} + \frac{|b-b_1|}{\beta},$$

α et β étant les nombres qui remplacent ici δ.

Mais on peut prendre au lieu de α et β la distance de z au segment (a, b) c'est-à-dire la plus petite valeur de $|Z - z|$ lorsque Z parcourt l'intervalle (a, b) : nous désignerons cette valeur par δ.

On aura alors en général

$$|\varphi_n(z)| < \frac{1}{\delta} \sum |a_n - b_n|,$$

Cela nous fait voir que : si l'ensemble des points ζ qu'on veut conserver sur (a, b) comme points singuliers est de largeur nulle la fonction $\varphi(z)$ est identiquement nulle.

En d'autres termes : *On ne peut pas former, avec le procédé que nous avons employé ici, une fonction analytique uniforme et possédant des points singuliers formant un ensemble de longueur nulle.*

Ce résultat négatif ne tient nullement à une particularité de la méthode employée pour construire $\varphi(z)$: il peut être expliqué d'une manière générale et rattaché à une propriété des fonctions *uniformes*, relative à la manière de se comporter de ces fonctions autour des points singuliers.

Si le degré d'infinitude de la fonction dans le voisinage d'un point singulier est inférieur à l'unité, ou encore si la fonction est bornée dans le voisinage des points singuliers, alors ces points ne peuvent pas former un ensemble de longueur nulle.

Mais il n'est pas possible d'insister ici sur cette propriété fondamentale des points singuliers.

10. — J'indiquerai, en terminant, une recherche qui généralise celle que nous avons développée ici.

Au lieu de considérer des fonctions multiformes dont les points singuliers sont *tous* situés sur un segment rectiligne, on peut considérer des fonctions multiformes dont les points critiques sont distribués dans le plan, et, reliant ces points par des lignes (segments rectilignes), obtenir une région R en dehors de laquelle la fonction considérée soit *uniforme*.

Ensuite on peut se proposer de retrancher de la fonction F, premièrement définie, une autre fonction F_1, de même nature, et telle que, faisant la différence

$$F - F_1 ,$$

la fonction obtenue continue à être uniforme en dehors de R, mais qui soit aussi uniforme en certaines régions $R_1, R_2, \ldots, R_n$ intérieures à R, qu'on peut appeler régions neutralisées par la soustraction de F_1. En continuant à retrancher de $F - F_1$ une autre fonction F_2 on obtiendrait d'autres régions neutralisées dans l'intérieur de R et, à la fin, on obtiendrait comme somme d'une série une fonction Φ *uniforme* possédant un ensemble parfait et non dense de points singuliers (si, bien entendu, les régions neutralisées ont été introduites de façon convenable).

J'ai pu obtenir par cette méthode la fonction uniforme que j'ai donnée dans les *Comptes Rendus* (28 novembre 1904) comme exemple d'une fonction analytique partout continue, donc continue aussi sur l'ensemble des points singuliers.

Dans les *Comptes Rendus* la fonction en question est définie par une intégrale double. D'ailleurs aussi la fonction du n° 7, qui est désignée par $\varphi(z)$, peut être définie par une intégrale ; mais l'intérêt de la recherche qui précède nous

paraît résider dans le fait que le problème général posé au n° 2 conduit à la forme générale de la fonction $F(z)$ donnée au n° 5.

Une recherche analogue et présentant même intérêt peut être faite pour le problème généralisé que nous venons d'indiquer.

Jassy, décembre 1916.

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

(3e article) [1]

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

Les quartiques gauches.

43. — MÉTHODE DU PLAN OSCULATEUR. — De même que, sur une cubique plane dont l'équation a ses coefficients rationnels, l'existence de deux arithmopoints quelconques entraîne *par alignement* celle d'un troisième arithmopoint, sur une quartique gauche d'équations rationnelles l'existence de trois arithmopoints particuliers quelconques entraîne celle d'un quatrième arithmopoint, trace de la courbe gauche sur l'arithmoplan défini par les trois arithmopoints connus.

Le plan défini par une tangente en un arithmopoint d'une quartique gauche et par un autre arithmopoint rencontre la courbe en un nouvel arithmopoint.

Enfin, le plan osculateur en un arithmopoint rencontre à nouveau la quartique gauche en un nouvel arithmopoint.

---

[1] Voir *L'Enseignement mathématique,* 18e année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428.