

# MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

## Récréation mathématique.

### *Le jeu de la Ziggurat.*

PAR

Pierre BOVET (Genève) et L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel).

---

I. — La plupart des recueils de récréations mathématiques<sup>1</sup> mentionnent sous des noms divers : La tour de Hanoï, l'anneau du brahmine, etc., un jeu et un problème dûs, sauf erreur, à Lucas. Un certain nombre de disques, 7 ou 8, de grandeurs différentes sont enfilés dans une aiguille verticale. Le plus large est à la base, puis les diamètres des disques vont en décroissant jusqu'au plus petit, de telle sorte que l'ensemble a l'aspect d'un cône en étages et le profil d'une *ziggurat* assyrienne. Deux autres aiguilles verticales, vierges de tout disque, sont fichées dans la même planchette. Il s'agit de reconstruire la tour sur l'une d'elles en déplaçant un seul disque à la fois et sans jamais poser un disque sur un autre plus étroit. On demande quel est le nombre minimum de déplacements nécessaires pour un nombre  $n$  de disques.

Ce nombre est égal à  $2^n - 1$ .

En effet, quel que soit le nombre des disques, on ne pourra ôter de la première aiguille le disque de base qu'au moment où l'une des deux autres aiguilles (appelons-la la seconde) sera entièrement libre, et où, par conséquent, tous les disques sauf le dernier seront enfilés régulièrement sur la troisième aiguille.

Puis une fois le disque de base déplacé de la première à la deuxième aiguille, il faudra rebâtir sur lui la pyramide telle qu'elle a été édiflée sur la troisième aiguille.

Le minimum des déplacements nécessaires pour  $n$  disques est ainsi représenté par une somme (appelons-la  $S_n$ ) qui se décompose comme suit :

$$S_n = S_{n-1} + 1 + S_{n-1} = 2S_{n-1} + 1.$$

---

<sup>1</sup> Par ex., LUCAS. *Récréations mathématiques*, 1893, t. III, p. 55-57. — Gaston TISSANDIER. *Récréations scientifiques*, p. 223. — W. AHRENS. *Mathematische Spiele*.

On vérifie aisément que la loi est générale par le passage de  $n$  à  $n + 1$ .

Partons maintenant de  $n = 2$ , nous aurons

$$S_2 = 2 S_1 + 1.$$

Mais déplacer une pyramide d'un seul disque, c'est évidemment l'affaire d'un seul coup :  $S_1 = 1$  ; donc

$$S_2 = 2 + 1 = 3 = 2^2 - 1$$

$$S_3 = (2 \times 3) + 1 = 7 = 2(2^2 - 1) + 1 = 2^3 - 1$$

$$S_4 = (2 \times 7) + 1 = 15 = 2(2^3 - 1) + 1 = 2^4 - 1, \text{ etc.}$$

et d'une manière générale

$$S_n = 2^n - 1.$$

Le problème de Lucas amuse les écoliers. Comme celui des grains de blé sur les cases de l'échiquier, il les familiarise avec les valeurs numériques des puissances successives de 2. Ils découvrent avec joie que pour transporter une tour de 30 disques, il faut à raison d'un coup par minute plus de 2500 ans.

*Cas de quatre aiguilles.* — Après avoir trouvé avec mes petits mathématiciens, des garçons de 11 à 13 ans, la solution du problème de Lucas, nous nous en sommes posé un second que je crois nouveau : « En combien de coups reconstruirait-on la tour, suivant les mêmes règles, si la planchette portait non plus 3 aiguilles, mais 4 ? »

Ce nouveau problème offre des analogies évidentes avec le premier. Le nombre total des coups (appelons-le  $T$  cette fois) s'obtient, comme c'était le cas pour  $S$  dans le problème précédent, par trois opérations :

1° L'enlèvement des  $n - 1$  disques supérieurs et leur empilement provisoire de façon à laisser entièrement libre une aiguille pour y transporter le disque de base ; — cette opération représente  $\nu$  coups.

2° Le transfert du disque de base de l'aiguille de départ à l'aiguille d'arrivée = 1 coup.

3° La reconstruction définitive de la pyramide sur le disque de base à l'aiguille d'arrivée, par le transfert de  $n - 1$  disques. Cette opération qui est l'inverse de la première nécessite le même nombre de coups, soit  $\nu$  coups.

Quel que soit le nombre des disques,  $T$  est toujours un nombre impair ; car la solution du problème est représentée par la formule  $T = 2 \nu + 1$ .

La différence entre les deux problèmes consiste en ceci : La

première opération partielle, celle qui doit dégager le disque de base et qui consiste en un empilement provisoire de  $n - 1$  disques, se fait non plus en *une* pyramide sur une seule aiguille, mais sur deux aiguilles en deux pyramides A et B, composées l'une (A), celle qui se construit d'abord, des  $a$  disques les plus petits, l'autre (B) des  $b$  disques les plus grands ( $a + b = n - 1$ ).

Ces deux tas A, B ont été construits dans des conditions très différentes. On a d'abord bâti A, celui des petits disques, en disposant librement des deux aiguilles auxiliaires que comporte notre jeu de 4 aiguilles. Puis on a commencé de bâtir B, le tas des disques les plus grands, mais on n'avait plus en ce moment à sa disposition qu'une seule aiguille auxiliaire comme dans le problème de Lucas, l'autre étant immobilisée par la pyramide A.

La troisième opération, reconstruction de la pyramide finale, s'effectue dans des conditions identiques à la première. Il s'agit en effet de transporter une seconde fois la pyramide B (sur le disque de base déplacé) avec l'aide d'une seule aiguille auxiliaire (la pyramide A immobilisant la seconde), puis la pyramide A (sur le sommet de B) avec l'aide des deux aiguilles.

Le problème final se ramène donc à celui-ci : « Quelle est au moment où l'on va déplacer le disque de base, la répartition la plus avantageuse des  $n - 1$  autres disques entre les deux pyramides A et B ? »

On sera tenté de déclarer qu'il faut faire la pyramide A aussi haute que possible, pour disposer aussi longtemps que possible des deux aiguilles, mais un examen plus attentif montre que le problème est plus complexe.

(Continuons d'appeler  $S_n$  le nombre de coups nécessaires pour transporter  $n$  disques dans le jeu des 3 aiguilles et  $T_n$  le nombre de coups nécessaires pour résoudre le même problème dans le jeu des 4 aiguilles). Pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , S est égal à T, car le transport s'effectue de la première à la troisième aiguille, sans que la quatrième soit mise à contribution. Mais pour  $n = 3$ , il n'en est plus de même : au moment de déplacer le disque de base, les deux aiguilles auxiliaires portent chacune une pyramide réduite de part et d'autre à un seul disque. Il a fallu 2 fois 1 coup pour les constituer, il en faudra autant pour les transporter. Donc, si  $T_n = 2^{\nu} + 1$ , on aura pour  $\nu = 2$

$$T_3 = (2 \times 2) + 1 = 5,$$

alors que, comme nous savons,  $S_3 = 2^3 - 1 = 7$ . Cette première divergence entre T et S détermine toutes les autres. Pour  $n = 4$ , nous aurons, au moment de transporter le disque de base,  $n - 1$  soit trois disques répartis en deux pyramides, soit nécessairement deux d'un côté et un de l'autre. Les deux répartitions possibles :



2 sur A et 1 sur B, ou 2 sur B et 1 sur A, se valent, car d'une part

$$\begin{aligned} 2 \text{ sur A} & \text{ représente } S_2 = 3 \text{ coups,} \\ 1 \text{ sur B} & \text{ » } T_1 = 1 \text{ coup,} \end{aligned}$$

d'où pour  $\nu = 4$ ,  $T_4 = 9$  et d'autre part

$$\begin{aligned} 1 \text{ sur A} & \text{ donne } S_1 = 1 \text{ coup,} \\ 2 \text{ sur B} & \text{ » } T_2 = 3 \text{ coups,} \end{aligned}$$

soit encore  $\nu = 4$ ,  $T_4 = 9$ .

Pour  $n = 5$ , nous pourrions avoir 3 empilements :

1. 1 sur A et 3 sur B, représentant  $S_1 = 1$ ,  $T_3 = 5$ ,  $\nu = 6$ ,  $T_5 = 13$ .

2. 3 sur A et 1 sur B, représentant  $S_3 = 7$ ,  $T_1 = 1$ ,  $\nu = 8$ ,  $T_5 = 17$ .

3. 2 sur A et 2 sur B, représentant  $S_2 = 3$ ,  $T_2 = 3$ ,  $\nu = 6$ ,  $T_5 = 13$ . Si nous entendons par  $T_5$ , comme il était convenu, le *minimum* des coups nécessaires pour résoudre le problème,  $T_5 = 13$ .

Nous ne continuerons pas l'examen détaillé des diverses solutions possibles pour les valeurs successives de  $n$ . Ce que nous avons trouvé suffit à nous orienter sur la façon de trouver toute la suite des valeurs de  $T$ .

Nous avons déjà dit ce que nous entendons par  $n$ , par  $S_n$  et par  $T_n$ . Considérons leurs valeurs successives dans ce tableau :

$n$	$S_n$	$(S_n - S_{n-1})$	$T_n$	$(T_n - T_{n-1})$
1	1	1	1	1
2	3	2	3	2
3	7	4	5	2
4	15	8	9	4
5	31	16	13	4
6	63	32	17	4
7	127	64	25	8
8	255	128	33	8
9	511	256	41	8
10	1023	512	49	8
11	2047	1024	65	16
12	4095	2048	81	16
13	8191	4096	97	16
14	16383	8192	113	16
15	32767	16384	129	16
16	65535	32768	161	32

. . . . .

Dans la répartition des  $n - 1$  disques entre les pyramides A et B, on n'accorde pas une préférence exclusive à A, pour deux raisons: 1° parce que pour les pyramides de 1 et 2 disques, il n'y a pas de différence entre  $S_n$  et  $T_n$ . Il n'y aura ainsi jamais aucun inconvénient à ce que B compte 2 disques. C'est ce que nous venons de voir pour  $n = 3, n = 4, n = 5$  cas 3. 2° Avec l'accroissement du nombre des disques en A arrive un moment où l'adjonction d'un disque à la pyramide A représente une plus grande différence que l'adjonction d'un troisième disque à l'autre pyramide B.

C'est ce qui arrive déjà pour  $n = 10$ . En effet: 7 disques en B et 2 en A représentent un plus grand nombre de coups que 6 en B et 3 en A.

$$T_7 = 25, S_2 = 3, v = 28, T_{10} = 57.$$

$$T_8 = 17, S_3 = 7, v = 24, T_{10} = 49.$$

Ceci nous amène à la loi de la série  $T_n$  telle qu'elle se dégage de la cinquième colonne de notre tableau. Cette cinquième colonne renferme les mêmes nombres que la troisième: chacun y figure autant de fois que le précédent plus une fois. Il y a un 1, deux 2, trois 4, quatre 8 et ainsi de suite. Ce que nous venons de voir de la façon dont s'établit la valeur minimum de  $v$  par l'addition d'un S et d'un T et par conséquent celle de  $T$  car  $T_n = 2v + 1$  nous explique cette particularité.

Les mathématiciens ont sans doute une façon succincte de noter la loi de formation de la série T et de calculer la valeur  $T_n$ . S'ils peuvent m'en signaler une qui soit à la portée de mes petits élèves, je leur en serai reconnaissant. Pour le moment, nous procédons comme suit:

Soit à trouver  $T_{24}$ . Le nombre triangulaire<sup>1</sup> inférieur à 24 qui en est le plus rapproché est 21, et de 21 à 24, il y a 3. Nous tirons de là que  $T_{24} = 1 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^6 = 513$ , qui s'obtiendrait indifféremment par l'un ou l'autre des empilements suivants

$$T_{18} = 225 \quad S_3 = 31 \quad v = 256$$

$$T_{17} = 193 \quad S_8 = 63 \quad v = 256$$

J'ai fait représenter graphiquement à mes élèves la série des valeurs de T. Cela nous a permis d'entrevoir la solution du problème des 5 aiguilles et de tous les suivants. Pour un nombre

<sup>1</sup> Mes jeunes mathématiciens connaissent cette façon pythagoricienne d'appeler les nombres, de la forme  $n \frac{(n+1)}{2}$ , résultant de l'addition des  $n$  premiers nombres entiers.

infini d'aiguilles, la série T se confondrait avec celle des nombres impairs.

J'ai conseillé à mes jeunes gens de fabriquer pour leurs amis le jeu des 4 aiguilles avec quelque 15 à 20 disques. Dans la pratique, ce jeu donnera matière à beaucoup plus d'hésitations que le jeu classique de la tour d'Hanoï. C'est dire qu'il a chance de n'être pas moins amusant. Ils l'introduiront par un petit conte assyrien et l'ont baptisé déjà : le *jeu de la Ziggurat*.

Mon vieil ami L.-G. Du Pasquier, professeur à l'Université de Neuchâtel, auquel j'ai communiqué les pages ci-dessus a bien voulu répondre déjà au vœu que j'y exprime d'obtenir des mathématiciens une formule facile permettant de calculer  $T_n$ . Il m'a permis de joindre à ma communication le complément qui suit.

Pierre BOVET (Genève).

II. — Désignons par  $t_{\lambda-1}$  le  $\lambda^{\text{ième}}$  nombre triangulaire; d'après cela,  $t_0 = 1$ ,  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = 6$ ,  $t_3 = 10$ ,  $t_4 = 15$ , ..... en général :  $t_\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda + 2)$ . Soit  $n$  un nombre positif d'ailleurs quelconque; représentons par  $E_2(n)$  le plus grand nombre triangulaire contenu dans  $n$ ; par exemple  $E_2(2) = 1$ ;  $E_2(\pi) = 3$ ;  $E_2(9) = 6$ ;  $E_2(10, 33) = 10$ ; etc. (Cette notation est une généralisation du symbole de Legendre:  $E(n) =$  plus grand nombre *entier* contenu dans  $n$ ; nous posons donc par définition:  $E_1(x) = E(x)$ ;  $E_2(x) =$  le plus grand nombre triangulaire contenu dans  $x$ ;  $E_3(x) =$  le plus grand nombre carré contenu dans  $x$ ;  $E_4(x) =$  le plus grand nombre pentagonal contenu dans  $x$ ; et ainsi de suite).

Cela posé, tout nombre positif  $n$  peut se représenter, et d'une seule manière, sous forme d'une somme de deux termes

$$n = t_\lambda + r \quad (\text{a})$$

où  $t_\lambda = E_2(n)$  est le plus grand nombre triangulaire contenu dans  $n$ , et  $r$  un nombre non négatif. Si, en particulier,  $n$  représente un nombre entier, par exemple le nombre des disques dans le jeu en question, on aura les décompositions suivantes :

$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16 ...
$t_\lambda = 1$	1	3	3	3	6	6	6	6	10	10	10	10	10	15	15 ...
$r = 0$	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1 ...
$\lambda = 0$	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4 ...

La série  $T_n$  est alors représentée par la formule

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \cdot 2^{\lambda+1}$$

La sommation de la série

$$1 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + (n + 1) \cdot 2^n = \sum_{\lambda}^{0 \dots n} (\lambda + 1) \cdot 2^\lambda.$$

qui intervient dans la formation des nombres  $T_n$ , peut être trouvée, grâce aux indications qui suivent, même par des garçons d'une douzaine d'années, pourvu qu'ils connaissent la formule de sommation des progressions géométriques. On a tout d'abord

$$\sum_{\lambda} (\lambda + 1) \cdot 2^\lambda = \sum_{\lambda} \lambda \cdot 2^\lambda + \sum_{\lambda} 2^\lambda.$$

D'une part,

$$\sum_{\lambda}^{0 \dots n} 2^\lambda = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

D'autre part, on peut représenter  $\sum_{\lambda}^{0 \dots n} \lambda \cdot 2^\lambda$  de la manière que voici :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda}^{0 \dots n} \lambda \cdot 2^\lambda &= 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^n \\ &= \begin{array}{cccccccc} 2 + & 2^2 + & 2^3 + & 2^4 + & 2^5 + & \dots + & 2^n \\ & + & 2^2 + & 2^3 + & 2^4 + & 2^5 + & \dots + & 2^n \\ & & & + & 2^3 + & 2^4 + & 2^5 + & \dots + & 2^n \\ & & & & + & 2^4 + & 2^5 + & \dots + & 2^n \\ & & & & & & + & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & + 2^{n-1} + 2^n \\ & & & & & & & & & + 2^n \end{array} \end{aligned}$$

Faisant la sommation de chaque ligne horizontale séparément, puis additionnant ces sommes partielles, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda}^{0 \dots n} \lambda \cdot 2^\lambda &= (2^{n+1} - 1) - 1 \\ &+ (2^{n+1} - 1) - (1 + 2) \\ &+ (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 4) \\ &+ (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\ &+ \dots \\ &+ (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}). \end{aligned}$$

Tout ce problème est ainsi ramené à la sommation de progressions géométriques.

On trouve facilement  $\sum_{\lambda}^{0\dots n} \lambda \cdot 2^{\lambda} = 2 + (n - 1) \cdot 2^{n+1}$ .

On en déduit immédiatement  $\sum_{\lambda}^{0\dots n} (\lambda + 1) \cdot 2^{\lambda} = 1 + n \cdot 2^{n+1}$ ,

et ce résultat, combiné avec la décomposition (a) du nombre  $n$  des disques, conduit à la formule cherchée

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \cdot 2^{\lambda+1}$$

L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel).

### Remarques sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise (Fibonacci),

à propos d'un article de M. E. Turrière.

Il est intéressant de rapprocher les recherches publiées récemment par MM. Hæntzschel<sup>1</sup> et Turrière<sup>2</sup> sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise. Tandis que M. Turrière ne fait usage que de moyens élémentaires, M. Hæntzschel montre comment l'emploi des fonctions  $p$  de Weierstrass facilite l'étude approfondie de ces problèmes arithmo-géométriques.

D'après le 7<sup>e</sup> exemple du 3<sup>e</sup> livre de l'Arithmétique de Diophante, il s'agit de trouver trois nombres en progression arithmétique  $(a - d, a, a + d)$  et tels que la somme de deux des nombres soit chaque fois un carré parfait.

Diophante cherche d'abord trois nombres carrés qui sont en progression arithmétique

$$2a - d = r^2, \quad 2a = t^2, \quad 2a + d = w^2;$$

il trouve

$$41^2 - 720 = 31^2, \quad 41^2, \quad 41^2 + 720 = 49^2.$$

<sup>1</sup> *Jahresbericht der D. M.-V.*, 24<sup>e</sup> année, 1915, p. 467-471, Lösung einer Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante; 25<sup>e</sup> année, 1916, p. 139-145, Ueber eine Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante.

<sup>2</sup> *L'Enseign. mathém.*, 17<sup>e</sup> année, 1915, p. 315-324, Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise.



Exemples. A.  $k=5$ ;  $n=\frac{5}{6}$ ; d'où suit  $2a = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ ;  $d=\delta=5$ .  
(Léonard de Pise.)

$$a) \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2; \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2; \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

$$b) \quad \frac{3\,344\,161^2}{24^2 \cdot 31^2 \cdot 41^2 \cdot 49^2} - 5 = \frac{113\,279^2}{24^2 \cdot 31^2 \cdot 41^2 \cdot 49^2}; \quad \left(\frac{3\,344\,161}{24 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 49}\right)^2;$$

$$\left(\frac{3\,344\,161}{24 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 49}\right)^2 + 5 = \left(\frac{4\,728\,001}{24 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 49}\right)^2. \quad \text{etc.}$$

B.  $k=-1$ ,  $n=-2$ ; d'où il suit  $2a=25$ ;  $d=\delta=-24$   
(*Jahresbericht*, 25<sup>e</sup> année, 1916, p. 142-145).

$$a) \quad 5^2 - 24 = 1^2; \quad 5^2; \quad 5^2 + 24 = 7^2.$$

$$b) \quad \left(\frac{1201}{70}\right)^2 - 24 = \left(\frac{1151}{70}\right)^2; \quad \left(\frac{1201}{70}\right)^2; \quad \left(\frac{1201}{70}\right)^2 + 24 = \left(\frac{1249}{70}\right)^2.$$

$$c) \quad \left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2 - 24 = \left(\frac{4\,319\,999}{1\,551\,851}\right)^2; \quad \left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2;$$

$$\left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2 + 24 = \left(\frac{10\,113\,607}{1\,551\,851}\right)^2. \quad \text{etc.}$$

Dans le travail de M. Turrière on aurait

$$x^1 = p(3u), \quad \text{voir p. 316, (3)} \quad \text{et} \quad x^1_2 = p(2u), \quad \text{voir p. 320, (10)}.$$

(D'après une lettre de M. HÆNTZSCHEL. *La Réd.*)