

# NOTE SUR LES PERMUTATIONS

Autor(en): **Aubry, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-17327>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## NOTE SUR LES PERMUTATIONS

(Définitions, classifications et transformations)

PAR

A. AUBRY (Dijon).

---

1. — Peut-on déterminer une permutation par la connaissance des positions, les unes par rapport aux autres, des diverses lettres, toutes différentes, qui la composent ?

1° Indiquons par la *duade*  $cb$  le fait que, dans la permutation, la lettre  $c$  est placée à gauche de  $b$ . La première lettre de la duade est la *prime*, la seconde l'*ultime*.

Si les deux lettres  $c$  et  $b$  se suivent immédiatement dans la permutation, la duade est dite *immédiate*. Elle est *médiate* dans le cas contraire.

2° Si une même lettre est plus d'une fois prime ou ultime, les duades ne sont pas toutes immédiates. Ainsi  $ab$  et  $ac$  ne peuvent être toutes deux immédiates ; en outre on ne sait si on a  $bc$  ou  $cb$  : les relations  $ab$ ,  $ac$  ne peuvent donner que des renseignements redondants ou incomplets.

3° L'existence des duades  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  ...  $ef$ ,  $fg$  entraîne celle de la duade  $ag$ .

Une duade médiate est la résultante de plusieurs duades médiate ou immédiates. Une duade immédiate ne peut se remplacer par d'autres duades.

4° Appelons *chaîne* une suite de duades dont la prime de chacune est identique à l'ultime de la précédente. La chaîne  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  s'écrira par abréviation : chaîne  $abcd$ .

Les deux couples  $ab$ ,  $ba$  ne peuvent coexister ; en général, une chaîne ne peut commencer et finir par la même lettre. Outre  $ab$  et  $ba$ , on citera les chaînes absurdes

$ac$ ,  $be$ ,  $ca$ ,  $db$  : chaîne  $aca$ ,

$ce$ ,  $df$ ,  $bc$ ,  $ab$ ,  $ea$  : chaîne  $abcea$ .

5° Si une chaîne de  $n - 1$  duades contient  $n$  lettres, ces duades

sont immédiates. Soit la chaîne  $abc \dots de$  et  $\alpha, \beta, \dots \gamma, \dots \delta$ , le nombre des lettres existant entre  $a$  et  $b$ , entre  $b$  et  $c$ , ... entre  $d$  et  $e$ ; on a :

$$1 + (\alpha + \beta + \dots + \delta) + (n - 2) + 1 = n, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \dots + \delta = 0;$$

ce dernier résultat ne peut avoir lieu que si  $\alpha = \beta = \dots \delta = 0$ . Ainsi la permutation correspondante n'est autre que  $abc \dots de$ .

6° Ainsi une permutation de  $n$  lettres est nécessairement et suffisamment déterminée par  $n - 1$  duades dont toutes les primes sont différentes et se retrouvent sauf une, dans les ultimes, lesquelles par suite contiennent une lettre qui ne se retrouve pas dans les primes. Par exemple les duades  $de, af, cb, ea, bd$  déterminent la chaîne  $cbdeaf$ .

7° Si ces conditions ne sont pas toutes remplies, la permutation ne peut généralement pas être déterminée. Ainsi les duades  $ae, ba, dc, df, ef$  fournissent la chaîne  $baef$ , d'où, à cause de  $df$ , les quatre formules possibles

$$dbaef, bdaef, badef, baedf,$$

dans lesquelles  $c$  doit se placer en respectant la condition  $dc$ , ce qui donne  $5 + 4 + 3 + 2 = 14$  solutions.

2. — Cette définition de la permutation en suggère une autre demandant également  $n - 1$  conditions et consistant dans l'indication des nombres de lettres contenues entre les termes des diverses duades données.

I. Ainsi les duades  $ab, cd, ef$ , avec cette indication que les deux premières encadrent<sup>1</sup> respectivement quatre et deux lettres, déterminent la permutation  $acefdb$ .

II. Les duades  $ab, cd, ef$  encadrant respectivement une, deux et trois lettres, déterminent-elles une permutation? On pourrait employer l'analyse indéterminée, comme au n° 1, 5°. Mais la recherche directe est plus courte. On a les dispositions

$$a * b, \quad c ** d, \quad e *** f,$$

les astérisques désignant des lettres inconnues. On verra aisément qu'il ne peut y avoir que les deux solutions  $eachfd, ceadbf$ .

III. Plus généralement on peut se demander quelles conditions doivent remplir les nombres  $\alpha, \beta, \dots \delta$  pour que la formule  $a_\alpha b_\beta c \dots d_\delta e$  représente une permutation des lettres  $abc \dots de$  ( $\alpha, \beta, \dots \delta$  désignent les nombres de lettres existant entre  $a$  et  $b$ , etc.).

<sup>1</sup> On veut dire par là qu'il y a quatre lettres entre  $a$  et  $b$  et deux entre  $c$  et  $d$ .

Considérons le groupe  $a_\alpha b_\beta c$  ; il y a entre  $a$  et  $c$  :

$\alpha + \beta + 1$  lettres si  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs, ou si  $\alpha$  est positif et  $\beta$  négatif avec  $\alpha + \beta < 0$  ,

$\alpha + \beta - 1$  » » » négatifs, » » » »  $\alpha + \beta > 0$  .<sup>2</sup>

On peut tirer de là successivement toutes les lettres de la permutation.

IV. Mais on arrivera bien plus aisément au but en mettant la formule sous une autre forme, où chaque lettre est surmontée d'un nombre indiquant sa distance à la lettre  $a$ . La formule  $ebdgafc$ , qui s'écrirait  $a_{-2}b_4c_{-3}d_{-1}e_4f_{-1}g$ , s'écrirait ainsi

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & -3 & 2 & -2 & 4 & 1 & -1 & \\ a & b & c & d & e & f & g & \end{array}$$

Cette expression montre immédiatement que la première lettre est  $a$  et la dernière  $e$  ; que toutes les places sont occupées et qu'il n'y a pas de lettres doublées ; que les voisines de  $d$ , par exemple, sont  $b$  et  $g$ , etc. On arrivera de la manière qui suit à la transformation indiquée :

$$a_{-2}b = a^0 b^{-3}, \quad b_4c = b^0 c^5 = b^{-3} c^2, \quad c_{-3}d = c^0 d^{-4} = c^2 d^{-2}, \dots$$

3. — La question suivante proposée dans le t. IV de la *Nouv. Corresp. Math.* et à laquelle il ne semble pas avoir été répondu, pose une nouvelle définition des permutations.

Déterminer une permutation des  $n$  premiers entiers, sachant combien il y a avant 1 de nombres plus grands que lui, combien avant 2 plus grands que lui, etc. (BRUN.)

Représentons la permutation 6513274 par la formule [2323100], indiquant qu'il y a deux chiffres avant 1 et plus grands que lui, etc. Les permutations 1234567 et 7654321 s'écriront ainsi [0000000] [et 6543210.]

Appelons en général  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$  les nombres des termes précédant 1, 2, 3, ...  $n$  et qui leur sont supérieurs.  $\alpha$  peut recevoir toutes les valeurs entières de 0 à  $n - 1$  ;  $\beta$ , toutes celles de 0 à  $n - 2$  ;  $\gamma$ , toutes celles de 0 à  $n - 3$  ; ...  $\mu$ , les deux valeurs 0 et 1 ;  $\nu$ , la valeur unique 0. De la sorte, les  $n$  valeurs de  $\alpha$  associées aux  $n - 1$  valeurs de  $\beta$ , ... aux deux valeurs de  $\mu$  et à l'unique valeur de  $\nu$ , donnent bien  $n!$  formules de forme  $[\alpha \dots \nu]$ , en nombre égal à celui des permutations des nombres 1, 2, ...  $n$ . Toutes ces associations sont évidemment distinctes, de même que les permutations des  $n$  premiers entiers ; et comme elles sont en même nombre de part et d'autre, elles se correspondent de manière à se

<sup>2</sup> Quant au cas  $a_\alpha b_{-\alpha} c$ , il est évidemment impossible.

définir mutuellement. Cette propriété a été démontrée autrement par J. BOURGET (*N. A.* 1871.)

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une formule  $[\alpha\beta \dots \nu]$  représente une permutation sont ainsi :

$$0 \leq \alpha \leq n - 1, \quad 0 \leq \beta \leq n - 2. \dots 0 \leq \mu \leq 1, \quad 0 = \nu.$$

Le rang de 1 est  $\alpha + 1$  ;

celui de 2 est  $\beta + 1$  si  $\alpha > \beta$ , et  $\beta + 2$  si  $\alpha \leq \beta$  ;  
 ..... 3 ...  $\gamma + 1$  si  $\alpha > \gamma$  et  $\beta > \gamma$  ;  $\beta + 2$  si  $\alpha \leq \gamma$  ou  $\beta \leq \gamma$  ;  
 $\gamma + 3$  si  $\alpha \leq \gamma$  et  $\beta \leq \gamma$  ;  
 . . . . .

Soit la formule  $[012343210]$  ; on l'assimilera à la formule générale  $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\mu\theta\nu]$ . Le rang de 1 est  $\alpha + 1 = 0 + 1 = 1$  ; le rang de 2 est  $\beta + 2 = 1 + 2 = 3$ , puisque  $\alpha < 3$  ; ... le rang de 6 est  $\zeta + 5 = 3 + 5 = 8$ , puisque les quatre nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont  $\leq \zeta$  et que  $\varepsilon > 5$  ; le rang de 7 est  $\mu + 4 = 2 + 4 = 6$ , puisque  $\alpha, \beta, \gamma$  sont  $\leq \mu$  ; le rang de 8 est  $\theta + 3 = 1 + 3 = 4$ , puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $\leq 2$  ; le rang de 9 est  $\nu + 2 = 0 + 2$ , puisque  $\alpha \leq \nu$ . On trouve ainsi la permutation 192837465.

4. — *Voisinages.* Les questions de ce genre se voient pour la première fois chez FRENICLE (*Abr. des Comb.* 1693), qui se propose de trouver le nombre de permutations des huit premières lettres, telles que  $b, c, d$  ne soient jamais ensemble, et celles où deux lettres données ne se trouvent ni au commencement ni à la fin. Les problèmes qui suivent donneront une idée de cette théorie.

I. Il n'est pas possible de déterminer une liste de permutations de  $2n$  lettres telles que chacune soit à côté de toutes les autres et une fois seulement. Il y a, en effet,  $C_{n,2}$  voisinages à réaliser, et comme chaque permutation donne  $n - 1$  voisinages, il faut envisager  $\frac{n}{2}$  permutations, ce qui montre d'abord que  $n$  doit être pair ; mais les voisinages de  $a$  par exemple sont au nombre de  $n - 1$  et demandent par conséquent  $n - 1$  permutations. — Ed. LUCAS (*Récr.* II, 175) indique à tort ce problème comme possible.

II. Le nombre de manières d'assembler  $n$  majuscules et  $n$  minuscules de manière qu'il n'y ait pas deux majuscules ou deux minuscules consécutives est  $2(n!)^2$  (Ed. LUCAS).

III. Trouver le nombre de manières dont  $n$  hommes et leurs femmes peuvent se placer sur une ligne, de manière qu'aucun homme ne soit auprès de sa femme (Ed. LUCAS). Ce problème n'a pas encore été résolu.

5. — *Rappel de diverses propriétés des permutations.* I. Toute permutation de  $n$  lettres  $ab \dots kl$  a sa *retournée*  $lk \dots ba$ . Elle donne naissance à  $n - 1$  permutations *tournantes*.

II. Le nombre des permutations de  $n$  lettres est égal à  $n!$

III. Le plus souvent, les lettres représentent des nombres; dans ce cas, une permutation quelconque  $ab \dots l$  a sa *complémentaire*  $(s - a)(s - b) \dots (s - l)$ ,  $s$  désignant la somme  $a + b + \dots + l$ .

Ainsi la somme de tous les nombres de neuf chiffres s'obtient en multipliant par  $\frac{1}{2}9!$  la somme des deux nombres 123456789 et 987654321. Ce problème est d'origine indienne.

IV. Une permutation *symétrique* est celle où deux lettres symétriquement placées dans l'ordre naturel, le sont également dans cette permutation. Pour  $2n$  ou  $2n + 1$  lettres, le nombre de ces permutations est  $n!2^n$  (Ed. LUCAS).

V. *Figuration des permutations.* M. LAISANT a remarqué qu'on peut représenter les permutations par les trajets d'un point A à un point N, en passant par un point B réuni à A par une ligne, un point C réuni à B par deux lignes, etc.

Ed. LUCAS les figure sur des *échiquiers* par des jetons dont les emplacements sont définis au moyen de coordonnées cartésiennes: la permutation 3142, par exemple, étant figurée par des jetons placés aux points 1 — 3, 2 — 1, 3 — 4, 4 — 2. Il examine ces figurations suivant diverses conditions de symétrie.

La recherche du nombre des permutations où il n'y a qu'une lettre dans chaque rangée, dans chaque colonne et dans chaque parallèle aux diagonales de l'échiquier, constitue le célèbre *problème des reines*, résolu seulement pour les onze premiers échiquiers. (Voir Ed. LUCAS, *l. cit.*, ROUSE-BALL, *Récr.* et AHRENS, *Math. Unt. u. Spiel.* 1910.)

VI. *Abaques.* On appelle ainsi un échiquier dont les  $n^2$  cases contiennent  $n$  fois la série des  $n$  premiers entiers. On en a un exemple dans les *carrés latins*<sup>1</sup>, où chaque rangée, comme chaque colonne, contient une permutation de ces  $n$  nombres.

On en a un encore plus remarquable dans le *carré d'Euler*<sup>2</sup> formé de  $n^2$  jetons de  $n$  couleurs et de  $n$  valeurs différentes et tellement placés que chaque couleur et chaque valeur se trouvent représentées dans les  $n$  rangées et les  $n$  colonnes. BACHET avait déjà donné celui de  $4^2$  jetons; EULER a commencé l'étude générale de ces carrés et a soupçonné l'impossibilité de celui de  $6^2$ , ce qui

<sup>1</sup> Ainsi nommés par EULER dans son célèbre mémoire de Vlissingen, mais connus avant lui. G. TARRY les appelle *permutations carrées*: il en prévoyait la généralisation en permutations *cubiques*, *quartiques*, etc. On a aussi appelé permutations des 2<sup>me</sup>, 3<sup>me</sup>, ... ordres. les nombres  $(n!)!$ ,  $((n!)!)!$ , etc. ainsi que les suivants  $n!! = 1! 2! \dots n!$ ,  $n!!! = 1!! 2!! \dots$

<sup>2</sup> Appelés *carrés symboliques* par M. BARBETTE. On les appelle aussi *carrés des n<sup>2</sup> officiers* (de  $n$  armes différentes et de  $n$  grades différents. EULER, *loc. cit.*).

a été vérifié par G. TARRY. M. BARBETTE a poussé très loin l'étude de ces carrés. (*Carrés magiques*, Liège, 1912.)

Le carré ci-dessous est dû à EULER; il donne en outre dans chacune des *diagonales complètes*<sup>1</sup> la collection des cinq couleurs et des cinq valeurs.

4 <sub>1</sub>	2 <sub>5</sub>	3 <sub>4</sub>	4 <sub>3</sub>	5 <sub>2</sub>
3 <sub>3</sub>	4 <sub>2</sub>	5 <sub>1</sub>	1 <sub>5</sub>	2 <sub>4</sub>
5 <sub>5</sub>	1 <sub>4</sub>	2 <sub>3</sub>	3 <sub>2</sub>	4 <sub>1</sub>
2 <sub>2</sub>	3 <sub>1</sub>	4 <sub>5</sub>	5 <sub>4</sub>	1 <sub>3</sub>
4 <sub>4</sub>	5 <sub>3</sub>	1 <sub>2</sub>	2 <sub>1</sub>	3 <sub>5</sub>

On peut d'ailleurs, par la méthode des *constellations* de G. TARRY, trouver une foule de collections semblables : supposons le carré indéfiniment reproduit à droite et au-dessous et découpons dans un carton cinq ouvertures correspondant aux termes 2<sub>2</sub>, 5<sub>3</sub>, 3<sub>4</sub>, 1<sub>5</sub> et 4<sub>1</sub>, par exemple, qui renferment la collection; dans chacune des positions sur le carré indéfini, on verra une collection semblable.

D'un carré d'EULER on déduit aisément un carré magique en considérant les termes du premier comme étant écrits dans la base  $n$ .

A signaler encore la *table de division* (mod.  $n$ ) où le terme  $(x, y)$  est  $\equiv x(x, y)$  et la *table de multiplication* (mod.  $n$ ) définie par la relation  $(x, y) \equiv xy$ . (Voir les *Fonc. arith.* de G. ARNOUX.)

VII. *Permutations réciproques*. JACOBI a appelé ainsi les permutations telles que le  $\alpha^{\text{ème}}$  terme de la première étant  $\beta$ , le  $\beta^{\text{ème}}$  de la seconde est  $\alpha$ . Cette considération est due à EULER (*l. cit.*).

Le nombre des permutations qui sont leurs propres réciproques est donné par la récurrence

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_k = u_{k-1} + (k-1)u_{k-2}.$$

VIII. Le nombre total des manières dont on peut effectuer le produit de  $n$  nombres différents est

$$\frac{(2n-3)! 2^{n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)}. \quad (\text{Catalan}).$$

IX. On appelle *inversion* le cas d'une duade qui n'est pas écrite dans l'ordre naturel : ainsi la permutation  $bdac$  comporte les trois inversions  $ba, da, dc$ . Une permutation est de première ou de seconde classe selon qu'elle présente un nombre pair ou un nombre impair d'inversions. Les deux théorèmes suivants sont le fondement de la théorie des *déterminants*.

<sup>1</sup> Telle que 5<sub>5</sub>, 4<sub>2</sub>, 3<sub>4</sub>, 2<sub>1</sub>, 1<sub>3</sub>.

Une permutation quelconque change de classe si on échange deux lettres. Les deux classes renferment un même nombre de permutations. (BEZOUT.)

X. Déterminer les permutations telles que, pour  $f$  et  $g$  quelconques, la différence de la  $f^{\text{ème}}$  et de la  $g^{\text{ème}}$  ne soit pas égale à  $f - g$ , en valeur absolue. Question identique au problème des reines (V).

XI. Rangeons les permutations de  $n$  lettres dans l'ordre où on les trouve successivement. Quelle est la  $k^{\text{ème}}$ ? Quel est le rang d'une permutation donnée? (J. BOURGET, *l. cit.*)

XII. *Permutations discordantes*. Le nombre des permutations où aucune lettre n'est à sa place est donné par la formule suivante, due à LAPLACE, mais entrevue par EULER :

$$n! - C_{n,1}(n-1)! + C_{n,2}(n-2)! - \dots$$

XIII. Les  $2^{n+1}$  premiers entiers — de même que les  $2^n(2k+1)$  — peuvent se partager en deux suites donnant une égalité au  $n^{\text{ème}}$  degré. (G. TARRY.)

XIV. Le nombre des permutations de  $n$  lettres présentant  $k$  inversions est égal au coefficient de  $x^k$  dans le produit

$$(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+n^3) \dots \quad (\text{O. Rodrigues.})$$

XV. Trouver le nombre des dispositions rectilignes d'un jeu de domino rangé suivant les règles du jeu (REISS.) Aux doubles près, cette question revient à la recherche du nombre de manières de tracer d'un seul trait un heptagone et ses diagonales (LAISANT). (Voir Ed. LUCAS. *op. cit.* II et IV.)

XVI. *Problème de Kirkman*. Voir dans les *Récr.* d'Ed. LUCAS et de ROUSE-BALL la solution de divers cas simples de ce problème, qui dans toute sa généralité consiste à disposer  $mn$  lettres en groupes de  $n$ , de manière que chaque lettre ne soit qu'une seule fois en présence de chacune des autres. (Voir aussi *Encycl. des sc. math.* I, 1, p. 79.)

XVII. *Problème du cavalier*. Il s'agit de faire parcourir au cavalier toutes les cases de l'échiquier, en suivant la règle du jeu. (Voir Ed. LUCAS, ROUSE-BALL et AHRENS, *op. cit.*)

6. — *Transformations des permutations. Echanges*. La transformation la plus simple consiste dans l'échange de deux lettres données; on représente cette opération par la notation  $(a, b)$  laquelle indique que  $a$  prend la place de  $b$  et  $b$ , celle de  $a$ .

Par exemple  $dgefabc$  se transforme en  $abcdefg$  par les échanges  $(a, d)$ ,  $(b, g)$ ,  $(c, e)$ ,  $(d, f)$ ,  $(e, f)$  et  $(f, g)$ , que pour abrégé on désignera en disant qu'on fait subir à  $dgefabc$  l'opération  $(a, d)(b, g)(c, e)(d, f)(e, f)(f, g)$ .

Cinq hommes et leurs femmes sont disposés dans l'ordre



ABCDE *abcde*; leur faire échanger leurs places de manière que chaque mari soit à côté de sa femme. On trouvera les solutions par l'analyse indéterminée; l'une d'elles s'indique par l'opération  $(a, B)(c, D)(d, E)(d, b)$ . On voit que *d* change deux fois; on remarquera aussi que l'ordre des échanges  $(a, B)$  et  $(c, D)$  est indifférent, ce qui tient à ce qu'ils n'ont pas de lettres communes; mais il n'en est pas de même des deux autres qui donnent des résultats différents si on exécute d'abord  $(d, b)$ .

Il faut ainsi toujours effectuer les échanges dans l'ordre indiqué.

A remarquer également que l'opération  $(a, b)$  est la même que  $(b, a)$  et que l'opération  $(a, b)$  faite deux fois laisse la permutation inchangée.

7. — *Déplacements*. Pour faire venir *a* entre *h* et *d* dans *hdgefabc*, on peut effectuer l'opération  $(a, f)(a, e)(a, g)(a, d)$ , ce qui revient à retirer *a* et repousser d'un rang l'ensemble des lettres *d, g, e, f*, et mettre *a* à l'endroit laissé libre. On appellera *déplacement* cette opération; la formule qui la représente sera donnée plus loin.

Etant donné la permutation ABC*abcαβγ*, la transformer par déplacements sur deux lettres à la fois, en une autre où les A soient ensemble, de même que les B et les C. On exécute les déplacements sur BC*α*, sur *bcα*, sur BC*α*, *bcβ* et C*βb*, toujours vers la gauche: on a alors A*ααBbβCcy*.

8. — *Transformations diverses*. Le nombre des permutations de *n* lettres étant limité, si par une certaine transformation la permutation  $P_0$  devient  $P_1$ , puis si, par une transformation identique, celle-ci devient  $P_2$ , et ainsi de suite, il arrivera qu'on retombera sur une transformée  $P_k$  identique à une permutation déjà trouvée  $P_h$ . On aura ainsi:

$$P_{k-1} = P_{h-1}, P_{k-2} = P_{h-2}, \dots, P_{k-h} = P_0.$$

Ainsi la permutation proposée fournit un certain nombre  $k - h$  de transformées revenant périodiquement. Il est commode d'écrire ces  $k - h$  permutations les unes sous les autres en un tableau synoptique.

I. Transformons, à l'aide de la formule  $x \equiv 2k + 3 \pmod{7}$ , les termes de la permutation  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ; puis, de la même manière, ceux de la transformée  $y \equiv 2x + 3 = 2^2k + 6 + 3$ , puis  $z \equiv 2y + 3 = 2^3k + 12 + 6 + 3$ , et ainsi de suite; on aura:

$$\begin{aligned} k &= 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \\ x &= 5 \ 7 \ 2 \ 4 \ 6 \ 1 \ 3 \\ y &= 6 \ 3 \ 7 \ 4 \ 1 \ 5 \ 2 \\ z &= 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \end{aligned}$$

La période comprend trois permutations.

II. La transformation d'EULER indiquée au n° 5, VII, donne une période de deux permutations.

III. D'un paquet de jetons 1, 2, 3, ...  $n$ , on met le premier sous le dernier, on élimine le deuxième, on met le troisième sous le paquet, puis le quatrième sur celui qui a déjà été retiré, et ainsi de suite. Quelle sera la permutation obtenue par les éliminations successivement effectuées ? (RIBI.)

Soit  $n = 10$ . Après dix opérations, on aura éliminé 2, 4, 6, 8, 10 et il restera 1, 3, 5, 7, 9; après quatre opérations sur ces derniers on éliminera 3, 7, et il restera 9, 1, 5; après deux opérations sur ces derniers on élimine 1 et il reste 5, 9; on élimine 9 et il reste 5, qu'on élimine. On a ainsi la permutation 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5. (Voir BARBETTE, *Piles merc.*, 1912.)

IV. *Sextines*. Mettons la dernière lettre d'une permutation avant la première; l'avant-dernière immédiatement avant la deuxième, l'antépénultième immédiatement avant la troisième, et ainsi de suite; nous aurons la sextine de cette permutation. Agissons de même sur cette sextine, puis sur ce second résultat et ainsi de suite; nous retrouverons la proposée après un nombre  $k$  d'opérations dépendant du nombre  $n$  des lettres. Voici la valeur de  $k$  pour les seize premières valeurs de  $n$ :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k =$	1	2	3	3	5	6	4	4	9	6	11	10	9	14	5	15

(Prompt.)

V. *Battements de Monge*<sup>1</sup>. Soit un paquet de  $n$  cartes; mettons la deuxième sur la première, la quatrième sur la deuxième, la sixième sur la quatrième et ainsi de suite; on aura une transformation qu'on pourra représenter par

$$n, n - 2, n - 4, \dots, 4, 2, 1, 3, 5, \dots, n - 3, n - 1,$$

ou

$$n - 1, n - 3, \dots, 4, 2, 1, 3, \dots, n - 1, n,$$

selon que  $n$  est pair ou impair.

Selon que  $h$  est pair ou impair, la  $h^{\text{ème}}$  carte devient, si  $n$  est pair,

$$\text{la } \left( \frac{n + 2 - h}{2} \right)^{\text{ème}} \text{ ou la } \left( \frac{n + 1 + h}{2} \right)^{\text{ème}}. \quad (\alpha)$$

Pour  $n$  impair, on ajoutera  $n - \frac{1}{2}$  aux nombres  $(\alpha)$ .

<sup>1</sup> En réalité cette manière de battre les cartes se voit déjà chez BACHET.

Opérons de la même manière sur cette transformée, puis sur la deuxième transformée, et ainsi de suite; nous retrouverons la proposée après un nombre  $k$  d'opérations qui sera

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \text{pour } n = & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 50 & 52 & 2^l \\ k = & 2 & 3 & 6 & 4 & 6 & 10 & 14 & 5 & 18 & 20 & 50 & 12 & l + 1. \end{array}$$

Sans écrire les diverses permutations, on calculera aisément les emplacements successivement occupés par une même carte. Ainsi, à l'aide des formules  $(\alpha)$ , on verra que, pour  $n = 8$ , la première carte devient la cinquième, la septième, la huitième et la première; — que, si  $n$  est de la forme  $6x + 4$ , la  $(2x + 2)^{\text{ème}}$  occupera constamment le même rang; — que si  $n$  est de la forme  $10x + 2$ , les  $(2x + 1)^{\text{ème}}$  et  $(6x + 2)^{\text{ème}}$  échangent leurs places alternativement.

9. *Substitutions.* CAUCHY a édifié une vaste et importante théorie, dont les préliminaires, qu'on traitera d'après lui, appartiennent au sujet du présent article, et où le grand analyste envisage les transformations des permutations en général comme un nouveau calcul ayant ses règles et ses notations propres. La figuration d'une telle transformation s'appelle une *substitution*. La transformation de  $abcdefghi$  en  $cdifebhga$ , par exemple, se représentera ainsi :

$$\left( \begin{array}{c} abcdefghi \\ cdifebhga \end{array} \right) \text{ ou } (a, c, i)(b, d, f)(h, g)(e). \quad (\alpha)$$

Cette dernière notation est la généralisation de celle des échanges: elle indique que  $a$  se change en  $c$ ,  $c$  en  $i$ ,  $i$  en  $a$ ;  $b$  en  $d$ ,  $d$  en  $f$ ,  $f$  en  $b$ ;  $h$  en  $g$ ,  $g$  en  $h$ ;  $e$  ne changeant pas de place. La première notation a ce désavantage de ne présenter qu'implicitement la substitution, objet de l'étude, et d'en présenter explicitement, au contraire, une simple application arbitraire; aussi elle n'est guère utilisée que pour faciliter l'écriture de la seconde. Ainsi  $\left( \begin{array}{c} abcdef \\ fedcba \end{array} \right)$  fait voir immédiatement que la substitution  $(a, f)(b, e)(c, d)$  change  $abcdef$  en sa retournée  $fedcba$ , et  $\left( \begin{array}{c} abcdef \\ bcdefa \end{array} \right)$ , que  $(a, b, c, d, e, f)$  change la même permutation en sa première tournante  $bcdefa$ .

Dans le premier exemple, la substitution se compose de quatre *cycles*, ou si l'on veut, de trois, le cycle  $(e)$  pouvant en effet être supprimé de la formule, comme inutile. Quand, comme dans le second exemple, il y a plusieurs cycles contenant chacun un même nombre de lettres, la substitution est dite *régulière*. Quand il n'y a qu'un cycle, comme dans le troisième exemple, elle est dite *circulaire*.

Autres exemples : La substitution  $(a, b, c)$  appliquée à  $cdba$  change celle-ci en  $adcb$ . La substitution permettant de passer de  $dbeac$  à  $adbec$ , ou de  $ceadfb$  à  $cbeafd$  est  $(d, a, e, b)(c)(f)$ , ou simplement  $(a, e, b, d)$ .

Une substitution ne peut se décomposer en cycles que d'une seule manière, et une même lettre ne peut se trouver dans deux cycles. D'ailleurs les cycles peuvent s'écrire dans un ordre quelconque, et dans un cycle donné on peut mettre la première une lettre quelconque.

La substitution  $\left(\begin{smallmatrix} cdifebhga \\ abcdefghi \end{smallmatrix}\right) = (a, i, c)(b, f, d)(h, g)(e)$ , qui transforme  $cdifebhga$  en  $abcdefghi$  est dite l'*inverse* de la substitution  $(\alpha)$ , parce qu'elle permet de passer de la transformée  $cdi \dots a$  à l'aide de  $(\alpha)$  à la permutation primitive  $abc \dots i$ . L'inverse de  $(\alpha)$  s'écrit en *renversant* les lettres dans les cycles de  $(\alpha)$ .

10. — On appelle *application* de la substitution S à la permutation P, ce que celle-ci devient quand on fait subir aux lettres qui la forment les modifications indiquées par S : ainsi l'application de  $(a, b)(c, d)$  à  $abcd$  est  $badc$ .

On appelle *produit* de deux substitutions  $S = (a, b, c, d)$ ,  $S' = (a, c, b, d)$ , et on note

$$SS' = (a, b, c, d) \cdot (a, c, b, d)^1$$

la substitution  $(a, d, c)$  qui, appliquée à une permutation déterminée, donnerait la même transformée qu'en y appliquant d'abord la substitution S, puis au résultat la substitution S'. Ainsi le produit  $SS' = (a, d, c)$  est la substitution qu'on trouve en changeant

$a$ en $b$	(1 <sup>re</sup> substitution),	puis $b$ en $d$	(2 <sup>me</sup> substitution)	
$d$ en $a$	»	»	$a$ en $c$	»
$c$ en $d$	»	»	$d$ en $a$	»
$b$ en $c$	»	»	$c$ en $b$	»

De là, la notion du produit  $SS'S'' \dots$  de plusieurs substitutions ; — de la *puissance*  $S^k$  d'une substitution S ; — de la puissance  $S^0 = 1$ , ou *substitution-unité*, qui laisse sans changement la permutation et pourrait s'écrire  $(a)(b)(c) \dots$ . La substitution inverse  $S^{-1}$  est ainsi celle qui, multipliée par S donne la substitution-unité : par exemple, comme on a :

$$(a, c, d, b, e) \cdot (a, e, b, d, c) = (a)(c)(d)(b) = S^0,$$

<sup>1</sup> Le point, indice de multiplication, n'est pas indispensable ; on ne peut confondre un produit de deux substitutions circulaires avec une substitution formée de deux cycles, car, dans ce dernier cas, les deux cycles n'ont pas de lettres communes.

les deux facteurs du premier membre sont les inverses l'un de l'autre.

Si  $S$  permet de passer de la permutation  $P$  à la permutation  $Q$ , on pourra la représenter par  $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ , de sorte que son inverse  $S^{-1}$  sera représentée par  $\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$ .

11. — On donnera ici, d'après CAUCHY, les périodes des puissances de diverses substitutions :

$$\begin{aligned} &(a, b), (a)(b) = 1^1 \quad (a, b, c), (a, c, b), (a)(b)(c) = 1 \quad . \\ &(a, b, c, d), (a, c)(b, d), (a, d, c, b), 1 \quad . \\ &(a, b, c, d, e), (a, c, e, b, d), (a, d, b, e, c), (a, e, d, c, b), 1 \quad . \\ &(a, b, c, d, e, f), (a, c, e)(b, d, f), (a, d)(b, e)(c, f), \\ &\qquad\qquad\qquad (a, e, c)(b, d, f), (a, f, e, d, c, b), 1 \quad . \\ &(a, b, c)(d, e), (a, c, b)(d, e), (a, b, c), (a, c, b)(d, e), 1 \quad . \\ &(a, b, c, d)(e, f), (a, c)(b, d), (a, d, c, b)(e, f), 1 \quad . \end{aligned}$$

Les puissances d'une substitution sont visiblement périodiques, puisque le nombre des formes qu'elles peuvent avoir est limité ; il est même aisé de voir que la période d'une substitution circulaire comprend un nombre de termes égal à celui des lettres, ce qu'on vérifiera en remarquant que, pour cinq lettres, par exemple, les puissances sont :

$$\begin{pmatrix} abcde \\ abcde \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ bcdea \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ cdeab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ deabc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ eabcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ abcde \end{pmatrix}, \dots$$

Si une substitution circulaire a  $n$  lettres, on a ainsi  $S^n = 1$ , d'où  $S^{n-1}S = 1$  ; donc  $S^{n-1}$  est l'inverse de  $S$ . En général  $S^{n-k}$  est l'inverse de  $S^k$  : la deuxième partie de la période se déduit donc de la première en renversant les termes des substitutions de celles-ci.

A remarquer en outre, d'une part, que toute substitution régulière est une puissance d'une certaine substitution circulaire, par exemple :

$$a, b, \dots l)(a', b', \dots l')(a'', b'', \dots l'') = (a, a', a'', b, b', b'', \dots l, l', l'')^3 ;$$

ensuite qu'une puissance de substitution circulaire n'est elle-même circulaire que si l'exposant est premier avec le nombre des lettres, en particulier si ce dernier est premier.

<sup>1</sup> La substitution  $(a, b)$  est sa propre inverse, c'est-à-dire que  $(a, b)^2 = 1$ , ce qu'on a vu déjà au n° 6.

On remarquera que la puissance d'une substitution non circulaire est le produit des puissances de ses différents cycles.

12. — Sans changer le résultat, on peut, dans un produit de substitutions,  $SS'S'' \dots$  effectuer les multiplications à mesure qu'elles se présentent ou les grouper comme ci-dessous :

$$SS'S''S''' \dots = S(S'S'')S''' \dots = SS'(S''S''') \dots$$

Mais, et c'est en quoi cette opération diffère de la multiplication ordinaire, on ne peut, dans le calcul, changer l'ordre des opérations<sup>1</sup>. Les substitutions  $SS'$  et  $S'S$  sont en général différentes ; dans le cas tout à fait exceptionnel où les deux produits sont identiques, les substitutions sont dites *échangeables* ; on en a des exemples simples : dans le cas où aucune lettre de  $S$  ne se retrouve pas dans  $S'$  et réciproquement, par exemple :

$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b) .$$

et, dans le produit de puissances d'une même substitution, comme

$$S^2S^3 = SS(SSS) = (SSS)(SS) = S^3S^2 .$$

Voici encore un exemple de CAUCHY : soient

$$S = (a, b, c, d)(e, f, g, h) , \quad S' = (a, c, e, g)(b, f, d, h) ,$$

on aura :

$$SS' = S'S = (a, f)(b, g)(c, h)(d, e) .$$

Ainsi étant donné deux expressions équivalentes d'une substitution,  $R = S$ , on peut multiplier les deux membres par une même substitution  $T$ , mais, dans les deux cas, à *droite* ou à *gauche*. Ainsi on aura :

$$TR = TS \quad \text{et} \quad RT = ST ,$$

mais non

$$TR = ST \quad \text{ni} \quad RT = TS .$$

13. — De  $RS = T$  et  $RS' = T$ , on tire, en multipliant à gauche par  $R^{-1}$ ,

$$S = R^{-1}T = S' .$$

Donc les produits d'une substitution par deux autres sont distincts et les produits d'une substitution par celles d'un même nombre de lettres les reproduisent toutes.

En outre le nombre de substitutions de  $n$  lettres est  $n!$  puisque c'est celui des substitutions qui peuvent changer une permutation en toutes les autres.

<sup>1</sup> On dit, dans ce cas, que la multiplication n'est pas *commutative*.

14. — I. Si les substitutions S et T sont échangeables avec R, il en est de même de leur produit. En effet des relations  $SR = RS$  et  $TR = RT$ , on tire

$$(ST)R = S(TR) = S(RT) = (SR)T = (RS)T = R(ST) .$$

II. Si en outre  $UR = RU$ , on a  $(STU)R = R(STU)$ . Et ainsi de suite.

III. Soient les relations  $RS = T$ ,  $SR = U$ , on aura :

$$TR = RU, T^2R = RSRSR = RU^2, \dots T^kR = RU^k ;$$

donc l'une des relations  $T^k = 1$ ,  $U^k = 1$  entraîne l'autre.

15. — Les produits  $TS = U$  et  $ST = V$  donnent des substitutions semblables. Considérons une permutation quelconque P, des lettres  $a, b, c, \dots$  en nombre au moins égal à celui des lettres de U, et appelons Q la permutation qui s'en déduit quand on lui fait subir cette substitution. On a :  $U = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ .

Supposons que  $a', b', c', \dots$  représentent ces mêmes lettres dans un ordre différent, et soient P' et Q' ce que deviennent P et Q quand on y accentue les lettres ; la substitution  $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$  sera évidemment semblable à U. Or la substitution qui change P en P' change aussi Q en Q' : appelons-la T ; on aura :

$$T = \begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} P' \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q' \\ Q \end{pmatrix} .$$

On tire de là

$$\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P' \\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}^1 = T^{-1}UT = T^{-1}(TS)T = ST = V .$$

Cette substitution V est donc semblable à U<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> On veut dire par là que la substitution  $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$  revient à substituer la permutation P à P', puis Q à P, enfin Q' à Q.

<sup>2</sup> Cette ingénieuse démonstration de CAUCHY peut être présentée ainsi d'après M. JORDAN. Éliminons S ; il vient  $V = T^{-1}UT$  ; soit  $(a, b, c, \dots)$  un des cycles de U ; si l'application de T à la permutation  $abc \dots$  la transforme en  $a'b'c' \dots$ , celle de  $T^{-1}$  change  $a'b'c' \dots$  en  $abc \dots$  et par conséquent celle de V à  $a'b'c' \dots$  la transforme successivement en  $abc \dots$ , en  $bc \dots a$  et  $b'c' \dots a'$  : on peut donc poser :

$$V = \begin{pmatrix} a'b'c' \dots \\ b'c' \dots a' \end{pmatrix} = (a', b', c', \dots) .$$

V est donc le résultat de l'application de T à U.

Exemples : pour

$$S = (a, b), T = (b, c), \text{ on a : } U = (a, c, b), V = (a, b, c) ;$$

$$S = (a, b, c, d), T = (a, c), \text{ on a : } U = (a, b)(c, d), V = (a, d)(b, c) ;$$

$$S = (a, b, c, d), T = (a, b), \text{ on a : } U = (b, c, d), V = (a, c, d) ;$$

$$S = (a, b, c, d, e, f), T = (b, c, d, e), \text{ on a : } U = (a, c, e, f)(b, d), \\ V = (a, b, d, f)(c, e) .$$

*Cor.* I. La substitution  $T^{-1}UT$ , semblable à  $U$ , s'obtient en effectuant la substitution  $T$  dans les cycles de  $U$ . En effet, cette opération<sup>1</sup> équivaut à l'accentuation des lettres dont il est parlé plus haut.

II. Si  $TU = UT$ , on a :  $U = T^{-1}UT$ . Ainsi, pour que  $T$  et  $U$  soient échangeables, il faut et il suffit que  $U$  ne change pas quand on lui applique  $T$ .

III. Si la substitution  $V$  est semblable à  $U = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ , il existe une substitution  $T$  telle que  $TU = VT$ , et par suite toute substitution semblable à  $U$  est de la forme  $T^{-1}UT$ . En effet l'expression  $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$  représente toute substitution semblable à  $U$  : on peut donc la supposer égale à  $V$ .

(A suivre.)

---

<sup>1</sup> Cette transformation d'une substitution est analogue à l'application d'une substitution à une permutation, — et par suite on peut la désigner sous le nom d'*application* de la substitution  $T$  à la substitution  $U$ .