

Remarque sur les deux dernières conditions du théorème de Torricelli.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Remarque sur les deux dernières conditions
du théorème de Torricelli.

13. — Laissant de côté la condition que l'hypoténuse soit mesurée par un carré, prenons l'ensemble des deux conditions :

$$b + c = \square, \quad a + c = \square.$$

Il n'est pas possible d'ailleurs de leur adjoindre la condition analogue :

$$a + b = \square;$$

si dans un arithmotriangle pythagorique les trois sommes de côtés pris deux à deux étaient, en effet, trois nombres carrés parfaits, les nombres de ce triangle satisferaient aux trois équations :

$$(p + q)^2\lambda = \square, \quad 2p^2\lambda = \square, \quad (p^2 + 2pq - q^2)\lambda = \square;$$

et λ serait simultanément un carré et le double d'un carré.

Reste donc à étudier le système des deux conditions :

$$b + c = \square, \quad a + c = \square;$$

la seconde permet de limiter le problème aux triangles primitifs ($\lambda = 1$) pour lesquels elle est d'ailleurs *ipso facto* remplie. Le problème est ainsi réductible à une seule équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT du second ordre

$$p^2 + 2pq - q^2 = \square,$$

dont la solution générale est

$$\frac{q}{p} = 2 \frac{1 - x}{1 + x^2},$$

en fonction d'un paramètre rationnel quelconque x .

On peut encore prendre pour un de ces arithmotriangles

pythagoriques, qui ne sont définis qu'à un facteur carré près, celui dont les côtés sont :

$$a = \frac{c^2}{4} + 1, \quad b = \frac{c^2}{4} - 1, \quad \text{avec} \quad c = \frac{\lambda^2 + (\lambda - 1)^2}{\lambda},$$

λ restant un paramètre arbitraire.

Ce problème est donc de ceux qui se résolvent complètement et dont la solution générale peut être formulée en fonction de deux paramètres.

14. — De la solution générale qui précède de cette question bien simple, résulte immédiatement l'équation dont dépend le problème de TORRICELLI. Il suffit de poser, à un facteur près sans importance,

$$p = 1 + x^2, \quad q = 2(1 - x);$$

et de résoudre le problème des arithmodistances pour l'arithmoparabole que représentent, dans le système de coordonnées rectangulaires p et q , ces deux équations paramétriques; l'équation obtenue,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square,$$

est une équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT du quatrième ordre :

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = \square.$$

Les solutions acceptables doivent satisfaire en outre à des inégalités qui assurent les signes positifs des cathètes des arithmotriangles pythagoriques correspondants, ainsi que l'ordre de grandeur $c > b$; il faut donc que q soit positif et que le rapport $\frac{p}{q}$ soit compris entre l'unité et $\sqrt{2} + 1$. Des trois inégalités

$$x < 1 < \frac{1 + x^2}{2(1 - x)} < \sqrt{2} + 1,$$

il résulte que le nombre rationnel x doit être compris soit dans l'intervalle

$$-(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{\sqrt{2} + 1} < x < -(\sqrt{2} + 1),$$

soit dans l'intervalle :

$$\sqrt{2} - 1 < x < -(\sqrt{2} + 1) + 2\sqrt{\sqrt{2} + 1}.$$

En posant

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = (x^2 + 1 - 2\mu)^2,$$

cette équation indéterminée devient

$$(\mu + 1)x^2 - 2x + 1 + \mu - \mu^2 = 0,$$

et la condition de rationalité de x fournit la forme canonique suivante de l'équation du problème :

$$\mu^3 - 2\mu = \square.$$

Le problème de TORRICELLI est ainsi rattaché à l'étude d'une cubique harmonique d'invariants $g_2 = 8$, $g_3 = 0$.

Cette équation $\mu^3 - 2\mu = \square$ dérive de l'équation déjà formée $\lambda^3 + 8\lambda = \square$ par la substitution :

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu}.$$

De la décomposition de certaines équations de Brahmagupta-Fermat.

15. — Soit tout d'abord une équation cubique de BRAHMA-GUPTA-FERMAT, telle que le polynôme entier cubique de son premier membre soit doué au moins d'un zéro rationnel ; si x_0 est le zéro rationnel du polynôme cubique $f(x)$, par une transformation $x = x_0 + ky$, celui-ci se change en un polynôme $y.g(y)$, produit par la nouvelle indéterminée y d'un trinôme $g(y)$ du second degré.

L'équation de FERMAT $f(x) = \square$ devient ainsi $y.g(y) = \square$, ou en explicitant les coefficients :

$$y(Ay^2 + By + C) = \square ;$$

A, B, C pouvant toujours être considérés comme étant des entiers qui ne sont pas nécessairement premiers entre eux,