Application des considérations précédentes au problème de Torricelli.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

λ doit satisfaire à l'équation du paragraphe précédent :

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = \square \,.$$

L'impossibilité de l'équation considérée, ou encore celle du système des équations simultanées :

$$X^2 + 2X + 2 = \square\,, \qquad X^2 - 2X - 2 = \square\,,$$

est équivalente à celle de l'équation $\sin u + \sin v = 1$.

Application des considérations précédentes au problème de Torricelli.

18. — Au paragraphe 8, la solution du problème de FERMAT a été rattachée par une voie toute naturelle à l'étude des solutions rationnelles de l'équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT :

$$(1 + t^2)(1 + 2t - t^2) = \square \,.$$

Cette équation est du type qui vient d'être considéré à l'instant : le polynôme du quatrième degré du premier membre est décomposé en un produit de facteurs quadratiques à coefficients rationnels.

La traduction analytique de l'énoncé du problème de FERMAT pouvait fort bien se présenter à TORRICELLI sous une forme équivalente, à la seule condition d'utiliser les formules de DIOPHANTE et non les formules de BRAHMAGUPTA, dans la représentation de l'arithmotriangle pythagorique.

Ces formules de DIOPHANTE,

$$b = \frac{P^2 - Q^2}{P^2 + Q^2}a\,, \qquad c = \frac{2PQ}{P^2 + Q^2}a\,,$$

ramènent la recherche des arithmotriangles pythagoriques, jouissant des deux propriétés énoncées $a = \square$ et $b + c = \square$, à l'étude des solutions entières de l'équation indéterminée :

$$(P^2 + Q^2)(P^2 + 2PQ - Q^2) = \square \,.$$

Tout facteur premier de l'un des deux polynômes quadratiques doit être un facteur premier de l'autre, et dans les deux cas sous des puissances impaires; or tout diviseur commun des deux polynômes quadratiques appartient aussi à leur somme et à leur différence :

$$2P(P + Q) , \qquad 2Q(P - Q) ;$$

P et Q étant premiers entre eux, par définition, ce facteur commun ne peut être que le nombre deux.

Comme d'autre part, en raison de la présence de $P^2 + Q^2$, aucun doute n'est possible sur les signes, l'équation se décompose soit en le système :

$$P^2 + Q^2 = \square , \qquad P^2 + 2PQ - Q^2 = \square ,$$

soit en le système :

$$P^2 + Q^2 = 2\square , \qquad P^2 + 2PQ - Q^2 = 2\square ;$$

le second système se ramène d'ailleurs au premier par la substitution $P + Q = 2P_1$, $P - Q = 2Q_1$; en d'autres termes, à toute solution t_1 correspond une nouvelle solution $t = \frac{1 - t_1}{1 + t_1}$, ce qui résulte de la symétrie qui existe dans les rôles des deux cathètes.

L'équation

$$(P^2 + Q^2)(P^2 + 2PQ - Q^2) = \square ,$$

du problème de Fermat *se décompose ainsi en deux équations simultanées*

$$P^2 + Q^2 = \square , \qquad P^2 + 2PQ - Q^2 = \square ,$$

dont le système lui est équivalent.

Nous avons alors :

$$a + c = \frac{(P + Q)^2}{P^2 + Q^2} a = \square ,$$

nous retrouvons ainsi que la somme de l'hypoténuse et de *l'une* des deux cathètes est un nombre carré parfait.

La solution générale de l'équation $P^2 + 2PQ - Q^2 = \square$ étant donnée par la formule

$$\frac{Q}{P} = 2 . \frac{1 - x}{1 + x^2} ,$$

nous sommes, par cette méthode et en utilisant l'équation $P^2 + Q^2 = \square$, ramenés à l'équation,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square ;$$

du paragraphe 14.

19. — Pour terminer, il convient de remarquer que les considérations générales du paragraphe 15 s'appliquent précisément aux équations

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \quad \text{et} \quad \mu^3 - 2\mu = \square$$

des paragraphes 8 et 14. J'ai déjà signalé que la seconde n'est qu'une conséquence de la première par la transformation

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu},$$

qui implique d'ailleurs que λ soit un carré parfait.

L'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \quad \text{ou} \quad \lambda(\lambda^2 + 8) = \square$$

est bien de l'espèce considérée au paragraphe 15. En posant $\lambda = \frac{P}{Q}$, elle devient

$$PQ(P^2 + 8Q^2) = \square ;$$

Q ne peut avoir de facteur premier à une puissance impaire : c'est nécessairement au signe près un carré parfait. Quant à P, il est de même de l'une des formes $\pm p^2$ ou $\pm 2p^2$. Le produit PQ devant être positif, la question de signe ne se pose pas et il suffit de prendre :

$$P = 2p^2 \quad \text{ou} \quad p^2 \qquad \text{et} \qquad Q = q^2 .$$

La première hypothèse, $P = 2p^2$, $Q = q^2$ donne :

$$2(p^4 + 2q^4) = \square ;$$

le nombre entier p doit donc être pair ; soit $p = 2p'$; l'équation devient

$$8p'^4 + q^4 = \square ;$$

et la solution correspondante est $\lambda' = 8\frac{p'^2}{q^2}$. Quant à la seconde hypothèse, elle donne la même équation :

$$p^4 + 8q^4 = \square ,$$

mais avec $\lambda = \frac{p^2}{q^2}$. Entre les deux solutions λ et λ', qui correspondent ainsi à une même solution de l'équation

$$\omega^4 + 8 = \square ,$$

existe la relation $\lambda\lambda' = 8$, laissant invariante l'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square .$$

En résumé: les solutions de cette dernière équation sont des nombres rationnels carrés ou doubles de carrés, et elles se transforment en l'équation :

$$\omega^4 + 8 = \square .$$

Nous retombons ainsi sur l'analyse de LAGRANGE (pages 386 et 387 du mémoire cité); les plus simples solutions sont (d'après LAGRANGE) :

$$\omega = 1 , \quad \frac{7}{6} , \quad \frac{239}{13} , \ldots$$

20. — L'équation

$$\mu^3 - 2\mu = \square$$

se laisse traiter d'une manière analogue; μ est au signe près un carré ou le double d'un carré et, suivant les cas, cette équation se transforme en l'une ou l'autre des équations :

$$2x^4 - y^4 = \square , \qquad x^4 - 2y^4 = \square .$$

LAGRANGE (pages 378-379 de son remarquable Mémoire) a bien remarqué qu'alors que les équations $x^4 + y^4 = \square$, $x^4 \pm 4y^4 = \square$, $2(x^4 \pm y^4) = \square$, $x^4 + 2y^4 = \square$ sont impossibles, d'après DIOPHANTE, FERMAT ou EULER, il n'en est pas de même de l'une et de l'autre des deux équations

$$2x^4 - y^4 = \square , \qquad x^4 - 2y^4 = \square ;$$

la première admet les solutions :

$$x = 1 \qquad y = 1$$
$$x = 13 \qquad y = 1$$
$$x = 1525 \qquad y = 1343$$
$$x = 2 \cdot 165 \cdot 017 \qquad y = 2 \cdot 372 \cdot 159 \; \ldots \; ;$$

la seconde admet les solutions[1] :

$$x = 3 \qquad y = 2$$
$$x = 113 \qquad y = 84$$
$$x = 57 \cdot 123 \qquad y = 6 \cdot 214 \; \ldots$$

Plus loin (p. 386 et 387), LAGRANGE a mis en évidence l'équivalence de chacune de ces deux équations avec l'équation $s^4 + 8t^4 = \square$ du paragraphe précédent. J'ai noté au paragraphe 6 qu'une pièce des *Opera postuma* de L. EULER concernait également l'équivalence des équatione $s^4 + 8t^4 = \square$ et $2x^4 - y^4 = \square$.

Si d'ailleurs on applique à la cubique d'équation

$$x^3 - 2x = y^2$$

la méthode de dérivation des arithmopoints au moyen de la tangente, on trouve que les coordonnées (x_2, y_2) du nouveau point d'intersection de la cubique avec la tangente au point (x_1, y_1) sont fournies par les formules :

$$x_2 = x_1 + 2y \cdot \rho \, , \qquad y_2 = y_1 + (3x^2 - 2)\rho \, ,$$

avec

$$\rho = \frac{16x^2 - 3y^4}{8x^2y^3} = \frac{4 + 12x^2 - 3x^4}{8y^3} \; ;$$

la loi de succession des abscisses est notamment la suivante :

$$x_2 = \left(\frac{x_1^2 + 2}{2y}\right)^2 \; ;$$

---

[1] Une erreur s'est glissée dans l'édition des *Œuvres* de LAGRANGE (p. 378), où le nombre y de la troisième solution particulière de l'équation $x^4 - 2y^4 = \square$ est égal à $2 \cdot 614$; alors que la véritable valeur de ce nombre est celle ci-dessus indiquée ($6 \cdot 214$).

la cubique admet une série d'arithmopoints d'abscisses

$$x_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \qquad x_2 = \left(\frac{113}{84}\right)^2, \ldots$$

qui sont toutes des nombres rationnels carrés parfaits.

L'application au problème de FERMAT des principes généraux relatifs aux équations de BRAHMAGUPTA-FERMAT, soit cubiques à zéro rationnel, soit du quatrième degré à premier membre décomposable en un produit de facteurs rationnels du second degré, permet, en résumé, d'expliquer l'origine du problème de TORRICELLI; elle ramène méthodiquement, en outre, la discussion de l'équation de ce problème de FERMAT et d'Ev. TORRICELLI à l'analyse de LAGRANGE et d'EULER.

Paris, le 5 février 1918.

REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv\,dx$

PAR

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

Il est manifeste qu'il n'existe aucune fonction u de la variable x telle que l'intégrale définie

$$I = \int_0^\infty uv\,dx \tag{1}$$

ait une valeur finie, déterminée et différente de zéro *quel que soit le polynôme* v *en* x.

Un fait curieux est, cependant, à signaler : *il existe des fonctions* u *de* x *pour lesquelles l'intégrale* (1) *a une valeur finie, déterminée et différente de zéro quel que soit le polynôme* v *en* x *à coefficients nombres algébriques* (entiers, com-