REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv\,dx$

Autor(en): **Petrovitch, M. Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18036

la cubique admet une série d'arithmopoints d'abscisses

$$x_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \qquad x_2 = \left(\frac{113}{84}\right)^2, \ldots$$

qui sont toutes des nombres rationnels carrés parfaits.

L'application au problème de FERMAT des principes généraux relatifs aux équations de BRAHMAGUPTA-FERMAT, soit cubiques à zéro rationnel, soit du quatrième degré à premier membre décomposable en un produit de facteurs rationnels du second degré, permet, en résumé, d'expliquer l'origine du problème de TORRICELLI; elle ramène méthodiquement, en outre, la discussion de l'équation de ce problème de FERMAT et d'Ev. TORRICELLI à l'analyse de LAGRANGE et d'EULER.

Paris, le 5 février 1918.

REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv\,dx$

PAR

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

Il est manifeste qu'il n'existe aucune fonction u de la variable x telle que l'intégrale définie

$$I = \int_0^\infty uv\,dx \tag{1}$$

ait une valeur finie, déterminée et différente de zéro *quel que soit le polynôme* v *en* x.

Un fait curieux est, cependant, à signaler : *il existe des fonctions* u *de* x *pour lesquelles l'intégrale* (1) *a une valeur finie, déterminée et différente de zéro quel que soit le polynôme* v *en* x *à coefficients nombres algébriques* (entiers, commensurables ou irrationnels algébriques, réels ou imaginaires, positifs ou négatifs).

Tel est, par exemple, le cas de la fonction

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \tag{2}$$

la racine carrée $\sqrt{x}$ ayant sa détermination positive.

En effet, la formule connue

$$B_{2n} = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz \qquad (z = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

où B_2, B_4, B_6, ... désignent les nombres de Bernoulli, par le changement $z^2 = x$ se transforme en

$$B_{2n} = \frac{2n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\infty \frac{x^n \, dx}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \lambda_n \pi^{2(n+1)} , \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

où

$$\lambda_n = 2^{2n+1} \frac{B_{2(n+1)}}{n+1} . \qquad \lambda_0 = 2B_2 = \frac{1}{3} \tag{6}$$

Si donc

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p$$

est un polynôme en x arbitraire, on aura

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx = \pi Q(\pi^2) , \tag{7}$$

où $Q(x)$ désigne le polynôme

$$Q(x) = a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 x + a_2\lambda_2 x^2 + \ldots + a_p\lambda_p x^p .$$

Lorsque les a_k sont des nombres *algébriques*, les $a_k\lambda_k$ le sont également. L'équation algébrique $Q(x) = 0$ ne pouvant avoir comme racine le nombre π^2, *l'intégrale* (7) *est finie, déterminée et essentiellement différente de zéro.*

On peut, à l'aide de la fonction (2), former une multitude de fonctions u pour lesquelles l'intégrale (1) jouira de la propriété précédente. Il suffit, par exemple, de se rappeler l'existence de fonctions u de x telles que l'intégrale (1) est *identiquement nulle quel que soit le polynôme* v *en* x. Telles seraient les fonctions signalées par Stieltjes

$$u = e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x} , \qquad u = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt[4]{x}} \cos \sqrt[4]{x} ,$$

ainsi qu'une foule d'autres, pour lesquelles on a

$$\int_0^\infty u x^n \, dx = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

En désignant une pareille fonction (ou une combinaison linéaire homogène de ces fonctions) par U et en prenant

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} + \mathrm{U} ,$$

l'intégrale (1) sera finie, déterminée et *différente de zéro* quel que soit le polynôme v à coefficients nombres *algébriques*.