

SUR L'ELIMINATION ALGÈBRIQUE

Autor(en): **Riquier, Ch.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18044>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR L'ÉLIMINATION ALGÈBRIQUE

PAR

Ch. RIQUIER (Caen).

Le présent travail a pour objet la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que n équations algébriques, à l'inconnue x , admettent quelque racine commune : dans la première partie, on étudie le cas fondamental de deux formes algébriques binaires, et on rappelle à ce sujet la méthode indiquée par Euler; on y ramène ensuite, dans la deuxième partie, le cas général, en exprimant que l'une des n équations données présente quelque racine commune avec toute combinaison linéaire des équations restantes.

PREMIÈRE PARTIE.

**Condition pour que deux formes algébriques binaires
admettent quelque racine commune.**

1. — On donne le nom de *forme algébrique* à un polynôme entier et homogène dépendant d'un nombre quelconque de variables; le cas d'une seule variable, n'étant d'aucune utilité, est systématiquement exclu, et la forme est dite

binaire, ternaire, quaternaire, ..., suivant qu'elle dépend de 2, 3, 4, ... variables.

L'adoption, pour les équations algébriques entières à une inconnue, de l'écriture homogène, dont nous ferons constamment usage dans cette première partie, repose sur l'observation suivante :

Nous plaçant, comme l'exige essentiellement le sujet de notre étude, dans le monde des quantités imaginaires, considérons tous les couples de valeurs *non simultanément nulles* qu'il est possible d'attribuer aux deux indéterminées x, y : ces divers couples peuvent manifestement se partager (sans omission ni répétition) en une infinité de groupes, comprenant chacun une infinité de couples, et tels que deux couples quelconques pris dans un même groupe forment un déterminant nul, tandis que deux couples respectivement pris dans deux groupes différents forment un déterminant différent de zéro. Dans un même groupe, l'expression générale des couples, si l'on désigne par (x', y') l'un quelconque d'entre eux et par α un facteur arbitraire assujéti à la seule restriction de n'être pas nul, est donnée par les formules

$$x = \alpha x' , \quad y = \alpha y'^1 ;$$

en substituant ces valeurs dans une forme binaire de degré m , $F(x, y)$, on a la relation

$$F(\alpha x', \alpha y') = \alpha^m F(x', y') ,$$

en sorte que, si quelqu'un des couples faisant partie du groupe considéré est une solution de l'équation $F(x, y) = 0$, tous les autres couples du même groupe jouissent de la même propriété : le groupe dont il s'agit est alors un *groupe-racine de l'équation* $F(x, y) = 0$, ou, plus simplement, une *racine* de cette équation, ou bien encore une *racine de la forme binaire* $F(x, y)$.

Une forme de degré nul se réduit à une simple constante.

¹ Le groupe se désigne d'habitude, abstraction faite du facteur arbitraire qui figure dans son expression générale, par l'un quelconque des couples dont il se compose.

Si l'on convient de ne pas considérer comme distinctes deux formes ne différant que par un facteur constant non nul, *une forme binaire de degré m dont les coefficients ne sont pas tous nuls est décomposable, et d'une seule manière, en un produit de m formes binaires du premier degré dont aucune n'a ses deux coefficients nuls à la fois*; les racines de ces dernières fournissent évidemment celles de la forme proposée.

Etant donnée une forme binaire $F(x, y)$, on dit qu'elle admet la racine (x', y') au *degré p de multiplicité*, ou bien encore qu'elle admet p fois la racine (x', y') , lorsqu'elle est algébriquement divisible par

$$\left| \begin{array}{c} x \ y \\ x' \ y' \end{array} \right|^p \text{ sans l'être par } \left| \begin{array}{c} x \ y \\ x' \ y' \end{array} \right|^{p+1} .$$

Il résulte du théorème précédent qu'*une forme binaire de degré m dont les coefficients ne sont pas tous nuls admet un nombre limité de racines, et que la somme des degrés de multiplicité de ces racines est exactement égale à m* ; ce qu'on exprime souvent en disant qu'*elle admet exactement m racines, distinctes ou non*.

En conséquence, *si une forme binaire de degré m admet plus de m racines distinctes, elle a nécessairement tous ses coefficients nuls*.

Lorsqu'une forme binaire prend la valeur zéro pour toutes valeurs attribuées à ses deux variables x, y , on dit qu'elle est *identiquement nulle*. Cela étant :

1° *Pour qu'une forme binaire soit identiquement nulle, il faut et il suffit que ses coefficients soient tous nuls*.

La condition posée est évidemment suffisante, et sa nécessité résulte de la remarque formulée en dernier lieu.

2° *Pour qu'un produit de formes binaires soit identiquement nul, il faut et il suffit que quelqu'un des facteurs le soit*.

La condition posée, évidemment suffisante, est d'ailleurs nécessaire.

En effet, si le produit est identiquement nul, il s'annule pour une infinité de couples de valeurs de x, y formant

deux à deux des déterminants différents de zéro, d'où résulte, puisque le nombre des facteurs est limité, que quelqu'un d'entre eux jouit de la même propriété : le facteur en question, admettant, d'après cela, plus de racines distinctes qu'il n'y a d'unités dans son degré, ne peut manquer d'avoir tous ses coefficients nuls, et, par suite, d'être identiquement nul.

Nous terminerons ce bref rappel de propriétés connues par l'observation suivante :

Lorsqu'une forme binaire de degré m a tous ses coefficients nuls, elle est algébriquement divisible par une puissance aussi élevée qu'on le voudra de toute forme binaire du premier degré n'ayant pas ses deux coefficients nuls à la fois ; on peut donc dire, en pareil cas, qu'elle admet telle racine que l'on voudra à un degré de multiplicité infini, ou bien encore qu'elle admet une infinité de fois telle racine que l'on voudra.

2. — Soient

$$\left. \begin{aligned} A(x, y) &= A_0 x^a + A_1 x^{a-1} y + A_2 x^{a-2} y^2 + \dots + A_{a-1} x y^{a-1} + A_a y^a, \\ B(x, y) &= B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b, \end{aligned} \right\} (1)$$

deux formes binaires, dont les degrés respectifs, a , b , sont tous deux *supérieurs à zéro*, et dont *aucune n'est identiquement nulle* : on observera que, dans les notations adoptées pour ces formes, l'indice dont se trouve affecté le coefficient de chaque terme est égal à l'exposant de la variable y dans le terme considéré ; cette convention, à laquelle nous nous conformerons constamment dans l'exposé de la première partie, permet de formuler commodément une importante propriété qui sera établie plus loin (N° 4).

Proposons-nous actuellement de déterminer deux formes inconnues, de degrés respectifs $a - 1$, $b - 1$,

$$\left. \begin{aligned} F_A(x, y) &= \alpha_0 x^{a-1} + \alpha_1 x^{a-2} y + \dots + \alpha_{a-1} y^{a-1}, \\ F_B(x, y) &= \beta_0 x^{b-1} + \beta_1 x^{b-2} y + \dots + \beta_{b-1} y^{b-1}, \end{aligned} \right\} (2)$$

par la double condition *de n'être pas toutes deux identique-*

ment nulles, et de rendre identiquement nulle la forme composée

$$A(x, y)F_B(x, y) + B(x, y)F_A(x, y), \quad (3)$$

de degré $a + b - 1$.

Cela étant, pour que les formes (1) admettent quelque racine commune, il faut et il suffit que le problème posé sur l'expression (3) soit possible.

I. *La condition posée est nécessaire.*

Effectivement, si les formes (1) admettent quelque facteur linéaire commun, elles satisfont aux identités

$$A(x, y) = (H_0x + H_1y)Q_A(x, y),$$

$$B(x, y) = (H_0x + H_1y)Q_B(x, y),$$

où H_0, H_1 désignent deux constantes non à la fois nulles, et $Q_A(x, y), Q_B(x, y)$ deux formes de degrés respectifs $a - 1, b - 1$, dont aucune n'est identiquement nulle. L'identité qu'il s'agit de vérifier prend donc la forme

$$(H_0x + H_1y)Q_A(x, y)F_B(x, y) + (H_0x + H_1y)Q_B(x, y)F_A(x, y) = 0,$$

et l'on y satisfera évidemment en prenant

$$F_A(x, y) = Q_A(x, y), \quad F_B(x, y) = -Q_B(x, y).$$

II. *La condition posée est suffisante.*

Tout d'abord, aucune des deux formes (2), non à la fois identiquement nulles, qui, en raison de la possibilité supposée du problème, rendent l'expression (3) identiquement nulle, ne peut, si on l'envisage séparément, être identiquement nulle : car si $F_A(x, y)$, par exemple, l'était, le produit $A(x, y)F_B(x, y)$ le serait aussi, et par suite (N° 1), puisque $A(x, y)$ ne l'est pas, $F_B(x, y)$. Cela étant, l'identité

$$A(x, y)F_B(x, y) = -B(x, y)F_A(x, y)$$

montre que $A(x, y)$ divise le produit $B(x, y)F_A(x, y)$; il en résulte, puisque $A(x, y)$ est d'un degré supérieur à $F_A(x, y)$, qu'il a quelque facteur linéaire commun avec $B(x, y)$.

3. — En écrivant les relations auxquelles doivent satisfaire les $a + b$ coefficients inconnus

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{a-1},$$

$$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{b-1}$$

pour que l'expression (3), de degré $a + b - 1$, soit identiquement nulle, on est conduit à poser, entre ces $a + b$ inconnues, un système, Σ , de $a + b$ équations linéaires et homogènes. Ainsi qu'il est facile de le constater, le déterminant, d'ordre $a + b$, qui a pour éléments les coefficients de ce système ne contient, dans a de ses colonnes, que des coefficients B et des zéros, et, dans les b colonnes restantes, que des coefficients A et des zéros; il est donc homogène et de degré a par rapport aux B, homogène et de degré b par rapport aux A, et par suite, si l'on suppose $a > 0$, $b > 0$, homogène et de degré *supérieur à zéro* par rapport aux coefficients de l'une quelconque des deux formes (1) : on lui a donné le nom de *résultant*.

Cela étant, et *en supposant qu'aucune des deux formes (1) ne soit de degré zéro, il faut et il suffit, pour que ces deux formes admettent quelque racine commune, que leur résultant soit nul.*

I. Supposons d'abord qu'aucune des deux formes (1) ne soit identiquement nulle.

Pour qu'elles admettent quelque racine commune, il est, en pareil cas, nécessaire et suffisant que le problème posé plus haut (N° 2) sur l'expression (3) soit possible, c'est-à-dire que le système Σ admette quelque solution où ses inconnues ne soient pas toutes nulles : il est donc nécessaire et suffisant que le résultant des deux formes (1) soit nul.

II. Affranchissons-nous maintenant de toute restriction relative à la nullité identique éventuelle des formes (1).

Pour qu'elles admettent quelque racine commune, il est évidemment nécessaire et suffisant :

· Ou bien que l'une au moins d'entre elles soit identiquement nulle ;

· Ou bien que, aucune d'elles ne l'étant, leur résultant soit nul.

Or, ce résultant, étant, d'après une observation faite au début, homogène et de degré *supérieur à zéro* tant par rapport aux A que par rapport aux B, ne peut manquer de s'évanouir si quelqu'une des formes (1) est identiquement nulle.

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de quelque racine commune est donc bien celle que formule notre énoncé.

4. — Le résultant des deux formes (1), homogène et de degré b par rapport aux A, homogène et de degré a par rapport aux B, jouit en outre, par rapport à l'ensemble des coefficients A et B, d'une intéressante propriété que nous allons établir : l'énoncé, ci-après formulé, de cette propriété suppose que l'on ait adopté, pour l'écriture des deux formes, la convention spécifiée au N° 2, c'est-à-dire que l'indice dont se trouve affecté le coefficient de chaque terme soit égal à l'exposant de la variable y dans le terme dont il s'agit.

Considérons, dans le développement du résultant, un terme quelconque

$$\omega \times A_0^{u_0} A_1^{u_1} A_2^{u_2} \dots A_a^{u_a} \times B_0^{v_0} B_1^{v_1} B_2^{v_2} \dots B_b^{v_b}$$

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_a = b, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_b = a) :$$

abstraction y étant faite du facteur numérique ω , nous nommerons *poids* de ce terme l'entier

$$(0 \cdot u_0 + 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \dots + a \cdot u_a) + (0 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + \dots + b \cdot v_b),$$

obtenu en effectuant, pour chacun des facteurs A, B qui concourent à sa formation, le produit de l'indice par l'exposant, et ajoutant ces divers produits.

Cela étant, la propriété annoncée consiste en ce que tous les termes du résultant ont le même poids ; on l'exprime en disant que *le résultant des deux formes (1) est isobare par rapport à l'ensemble de leurs coefficients*.

I. Le système Σ , dont la considération conduit au résultant des deux formes (1), s'obtient, comme nous l'avons vu (N° 3),

en écrivant que l'expression (3),

$$A(x, y)F_B(x, y) + B(x, y)F_A(x, y),$$

est identiquement nulle. Or, le développement et l'ordination des deux produits

$$\left. \begin{aligned} A(x, y)F_B(x, y) &= (A_0x^a + A_1x^{a-1}y + A_2x^{a-2}y^2 + \dots \\ &\quad + A_{a-1}xy^{a-1} + A_ax^a) \\ &\quad \times (\beta_0x^{b-1} + \beta_1x^{b-2}y + \dots + \beta_{b-1}y^{b-1}), \\ B(x, y)F_A(x, y) &= (B_0x^b + B_1x^{b-1}y + B_2x^{b-2}y^2 + \dots \\ &\quad + B_{b-1}xy^{b-1} + B_by^b) \\ &\quad \times (\alpha_0x^{a-1} + \alpha_1x^{a-2}y + \dots + \alpha_{a-1}y^{a-1}), \end{aligned} \right\} (4)$$

de degré $a + b - 1$, donne respectivement

$$\left. \begin{aligned} &x^{a+b-1} (A_0\beta_0) \\ &+ x^{a+b-2}y (A_1\beta_0 + A_0\beta_1) \\ &+ x^{a+b-3}y^2 (A_2\beta_0 + A_1\beta_1 + A_0\beta_2) \\ &\dots \\ &+ x^{b-1}y^a (A_a\beta_0 + A_{a-1}\beta_1 + A_{a-2}\beta_2 + \dots) \\ &+ x^{b-2}y^{a+1} (A_a\beta_1 + A_{a-1}\beta_2 + \dots) \\ &\dots \\ &+ y^{a+b-1} (A_a\beta_{b-1}) \end{aligned} \right\}$$

et

$$\left. \begin{aligned} &x^{b+a-1} (B_0\alpha_0) \\ &+ x^{b+a-2}y (B_1\alpha_0 + B_0\alpha_1) \\ &+ x^{b+a-3}y^2 (B_2\alpha_0 + B_1\alpha_1 + B_0\alpha_2) \\ &\dots \\ &+ x^{a-1}y^b (B_b\alpha_0 + B_{b-1}\alpha_1 + B_{b-2}\alpha_2 + \dots) \\ &+ x^{a-2}y^{b+1} (B_b\alpha_1 + B_{b-1}\alpha_2 + \dots) \\ &\dots \\ &+ y^{b+a-1} (B_b\alpha_{a-1}); \end{aligned} \right\}$$

on en déduit respectivement les deux tableaux de coefficients

$$\begin{array}{cccccccc}
 A_0 & & & & & & & \\
 A_1 & A_0 & & & & & & \\
 A_2 & A_1 & A_0 & & & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 A_a & A_{a-1} & A_{a-2} & \dots & & & & \\
 & A_a & A_{a-1} & \dots & & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & & & & & & & A_a
 \end{array} \quad (5)$$

et

$$\begin{array}{cccccccc}
 B_0 & & & & & & & \\
 B_1 & B_0 & & & & & & \\
 B_2 & B_1 & B_0 & & & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 B_b & B_{b-1} & B_{b-2} & \dots & & & & \\
 & B_b & B_{b-1} & & & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & & & & & & & B_b
 \end{array} \quad (6)$$

où les zéros n'ont pas été mis en évidence, et dont la simple juxtaposition (l'un à droite, l'autre à gauche) donne le résultant. Chacun des tableaux (5), (6) contient $a + b$ lignes, puisque les produits (4) sont de degré $a + b - 1$; le premier, celui des A, contient b colonnes, puisque les indéterminées β sont en nombre b ; le second, celui des B, contient a colonnes, puisque les indéterminées α sont en nombre a . Si l'on considère l'un d'eux, par exemple le tableau des A, à b colonnes, on voit immédiatement que, dans une colonne quelconque, deux éléments A ne contiennent entre eux aucun zéro, et que, lorsqu'on parcourt la colonne de haut en bas, le poids ou indice de ces éléments augmente progressivement de 1, d'une ligne à la suivante; puis, de même, que, dans une ligne quelconque, deux éléments A ne contiennent entre eux aucun zéro, et que, lorsqu'on parcourt la ligne de gauche à droite, le poids ou indice de ces éléments décroît

l'indice des éléments A aille en croissant, au lieu de décroître, quand on suit, sur une ligne quelconque, le sens habituel de l'écriture, nous conviendrons désormais de renverser l'ordre des colonnes en conservant l'ordre des lignes. Nous conviendrons en outre, ce qui ne changera évidemment en rien les poids respectifs des divers termes du résultant, d'affecter chaque zéro d'un indice positif ou négatif choisi de telle sorte que, dans toute colonne parcourue de haut en bas sans y faire abstraction des zéros, l'indice des éléments successifs augmente progressivement de 1, d'une ligne à la suivante, et que, dans toute ligne parcourue de gauche à droite sans y faire non plus abstraction des zéros, la même propriété ait lieu, d'une colonne à la suivante. Ces diverses conventions étant adoptées et appliquées, si l'on remplace ensuite chaque élément du tableau par son indice, le tableau d'entiers algébriques qui en résulte,

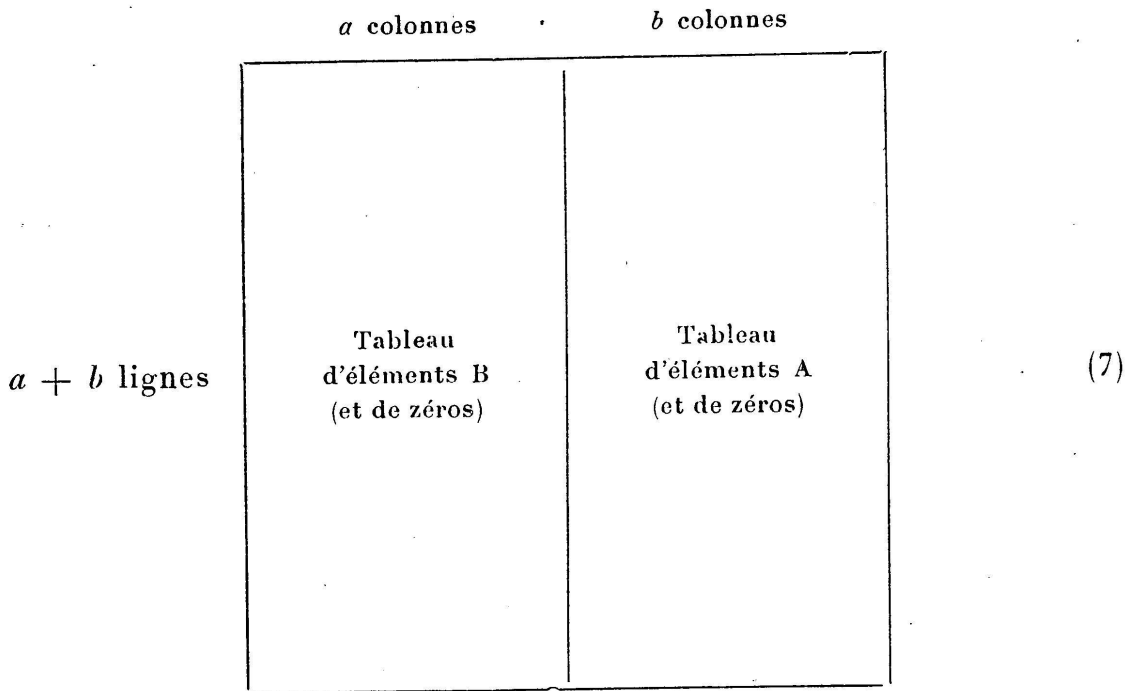
$$\begin{array}{cccc}
 -b + 1 & -b + 2 & \dots - 1 & 0 \\
 -b + 2 & -b + 3 & \dots 0 & 1 \\
 -b + 3 & -b + 4 & \dots 1 & 2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -b + a + 1 & -b + a + 2 & \dots a - 1 & a \\
 -b + a + 2 & -b + a + 3 & \dots a & a + 1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a & a + 1 & \dots a + b - 2 & a + b - 1 ,
 \end{array}$$

présente une structure telle, que, dans toute colonne parcourue de haut en bas, comme aussi dans toute ligne parcourue de gauche à droite, les entiers croissent progressivement de 1. Et il va sans dire que si aux divers éléments entiers qui le constituent on ajoute, comme nous allons être conduit à le faire, un même entier algébrique, cette propriété subsistera.

Tout ce qui vient d'être dit au sujet du tableau des A [tableau (5)] est d'ailleurs entièrement applicable au tableau des B [tableau (6)].

II. Pour faire apparaître la nature isobare du résultant, lequel s'obtient, comme nous l'avons fait observer, par la

juxtaposition, schématiquement figurée ci-dessous, des deux tableaux partiels (5) et (6),



substituons respectivement aux deux tableaux partiels de (7) ceux que forment les indices de leurs éléments : nous aurons ainsi (I)

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 -a + 1 & -a + 2 & \dots & 0 & -b + 1 & -b + 2 & \dots & 0 \\
 -a + 2 & -a + 3 & \dots & 1 & -b + 2 & -b + 3 & \dots & 1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 b & b + 1 & \dots & b + a - 1 & a & a + 1 & \dots & a + b - 1
 \end{array} \quad (8)$$

En augmentant alors de b unités chacun des entiers du tableau partiel de droite extrait de (8), nous aurons le nouveau tableau

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 -a + 1 & -a + 2 & \dots & 0 & 1 & 2 & \dots & b \\
 -a + 2 & -a + 3 & \dots & 1 & 2 & 3 & \dots & b + 1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 b & b + 1 & \dots & b + a - 1 & a + b & a + b + 1 & \dots & a + 2b - 1 ;
 \end{array}$$

progressivement de 1, d'une colonne à la suivante : afin que ce dernier, dans son ensemble, présente la structure spéciale que présentait séparément chacun des deux tableaux partiels de (8), c'est-à-dire que, dans toute colonne parcourue de haut en bas, comme aussi dans toute ligne parcourue de gauche à droite, les entiers augmentent progressivement de 1. Il jouit donc manifestement de la propriété que $a + b$ de ses éléments, arbitrairement choisis sous la seule condition d'appartenir à $a + b$ lignes distinctes en même temps qu'à $a + b$ colonnes distinctes, ont pour somme

$$\begin{aligned} & (a + b)(-a + 1) \\ & + 0 + 1 + 2 + \dots + (a + b - 1) \\ & + 0 + 1 + 2 + \dots + (a + b - 1) , \end{aligned}$$

ou

$$(a + b)(-a + 1) + (a + b)(a + b - 1) ,$$

ou enfin

$$b(a + b) ;$$

il en résulte que, dans le tableau (8), la somme de $a + b$ éléments arbitrairement choisis sous la même condition a pour valeur $b(a + b) - b^2$, ou ab . En conséquence, dans le résultant (7), le poids de chaque terme a pour valeur ab ; ce résultant est donc bien, comme nous voulions l'établir, isobare par rapport à l'ensemble des coefficients A et B.

5. — L'énoncé de la propriété isobarique, qui fait l'objet du numéro précédent, suppose, comme nous l'avons dit, que l'on ait adopté, pour l'écriture des deux formes (1), la convention spécifiée au N° 2, c'est-à-dire que l'indice dont se trouve affecté le coefficient de chaque terme soit égal à l'exposant de y dans le terme dont il s'agit; il va sans dire toutefois que *cette propriété peut se formuler de la même façon si l'on augmente d'un même entier* (algébrique) p *les indices respectifs des divers coefficients A, et d'un même entier* (algébrique) q *les indices respectifs des divers coefficients B* : car le poids de chaque terme du résultant se trouve alors augmenté de l'entier constant $bp + aq$.

6. — Exemples de la formation du résultant de deux formes binaires.

I. Résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_0x + A_1y, \\ B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2. \end{aligned} \right\}$$

En écrivant que l'expression

$$(A_0x + A_1y)(\beta_0x + \beta_1y) + (B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2)\alpha_0$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0\beta_0 + B_0\alpha_0 &= 0, \\ A_1\beta_0 + A_0\beta_1 + B_1\alpha_0 &= 0, \\ A_1\beta_1 + B_2\alpha_0 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant,

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & B_0 \\ A_1 & A_0 & B_1 \\ 0 & A_1 & B_2 \end{vmatrix},$$

ou

$$B_2A_0^2 - A_1(A_0B_1 - B_0A_1).$$

II. Résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_0x^2 + A_1xy + A_2y^2, \\ B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

En écrivant que l'expression

$$\begin{aligned} (A_0x^2 + A_1xy + A_2y^2)(\beta_0x + \beta_1y) \\ + (B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2)(\alpha_0x + \alpha_1y) \end{aligned}$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0\beta_0 + B_0\alpha_0 &= 0, \\ A_1\beta_0 + A_0\beta_1 + B_1\alpha_0 + B_0\alpha_1 &= 0, \\ A_2\beta_0 + A_1\beta_1 + B_2\alpha_0 + B_1\alpha_1 &= 0, \\ A_2\beta_1 + B_2\alpha_1 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant,

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & B_0 & 0 \\ A_1 & A_0 & B_1 & B_0 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{vmatrix} .$$

On peut, comme il est facile de s'en assurer en effectuant les calculs, le mettre sous les deux formes suivantes, très fréquemment usitées :

$$(A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2) , \quad (10)$$

et

$$[2(A_0 B_2 + B_0 A_2) - A_1 B_1]^2 - (A_1^2 - 4A_0 A_2)(B_1^2 - 4B_0 B_2) . \quad (11)$$

III. Résultant des deux formes

$$\left. \begin{array}{l} A_0 x + A_1 y , \\ B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 x y^2 + B_3 y^3 . \end{array} \right\}$$

¹ L'une et l'autre se retrouvent très aisément à l'aide des calculs mnémotechniques que nous allons indiquer.

Calcul mnémotechnique de la formule (10).

Posant

$$\begin{aligned} A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2 &= A(x, y) , \\ B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2 &= B(x, y) , \end{aligned}$$

on remplace le système des deux équations

$$A(x, y) = 0 , \quad B(x, y) = 0$$

par le système des deux équations

$$A(x, y) = 0 , \quad \frac{B_0 A(x, y) - A_0 B(x, y)}{y} = 0 ,$$

dont la deuxième, linéaire en x et y , peut s'écrire

$$(A_0 B_1 - B_0 A_1)x + (A_0 B_2 - B_0 A_2)y = 0 ,$$

ou

$$\frac{x}{A_0 B_2 - B_0 A_2} = - \frac{y}{(A_0 B_1 - B_0 A_1)} ;$$

en remplaçant, dans la première, x et y par les quantités proportionnelles que fournit la seconde, il vient, comme premier membre,

$$A_0 (A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - A_1 (A_0 B_3 - B_0 A_2)(A_0 B_1 - B_0 A_1) + A_2 (A_0 B_1 - B_0 A_1)^2 ,$$

ou

$$A_0 (A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)[A_1 (A_0 B_2 - B_0 A_2) - A_2 (A_0 B_1 - B_0 A_1)] ,$$

ou

$$A_0 (A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)A_0 (A_1 B_2 - B_1 A_2) ,$$

ou enfin, après suppression du facteur A_0 ,

$$(A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2) .$$

Calcul mnémotechnique de la formule (11).

On résout chacune des équations quadratiques

$$\begin{aligned} A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2 &= 0 , \\ B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2 &= 0 \end{aligned}$$

En écrivant que l'expression

$$(A_0x + A_1y)(\beta_0x^2 + \beta_1xy + \beta_2y^2) + (B_0x^3 + 3B_1x^2y + 3B_2xy^2 + B_3y^3)\alpha_0$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0\beta_0 &+ B_0\alpha_0 = 0, \\ A_1\beta_0 + A_0\beta_1 &+ 3B_1\alpha_0 = 0, \\ A_1\beta_1 + A_0\beta_2 + 3B_2\alpha_0 &= 0, \\ A_1\beta_2 + B_3\alpha_0 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant,

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & B_0 \\ A_1 & A_0 & 0 & 3B_1 \\ 0 & A_1 & A_0 & 3B_2 \\ 0 & 0 & A_1 & B_3 \end{vmatrix},$$

ou

$$3A_0A_1(A_1B_1 - A_0B_2) + A_0^3B_3 - A_1^3B_0.$$

par la formule élémentaire connue, on égale entre elles les deux expressions irrationnelles qui en résultent pour le rapport $\frac{x}{y}$, et on rend la relation rationnelle.

Si l'on pose $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, cette suite d'opérations donnera d'abord (sans correspondance de signes)

$$\frac{-A_1 - \varepsilon\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{A_0} = \frac{-B_1 + \varepsilon'\sqrt{B_1^2 - 4B_0B_2}}{B_0},$$

puis, en isolant la partie irrationnelle,

$$A_0B_1 - B_0A_1 = \varepsilon B_0\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} + \varepsilon' A_0\sqrt{B_1^2 - 4B_0B_2},$$

puis, en élevant au carré,

$$\begin{aligned} (A_0B_1 - B_0A_1)^2 &= B_0^2(A_1^2 - 4A_0A_2) + A_0^2(B_1^2 - 4B_0B_2) \\ &+ 2\varepsilon\varepsilon' A_0B_0\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}\sqrt{B_1^2 - 4B_0B_2}, \end{aligned}$$

puis, en isolant de nouveau la partie irrationnelle, et réduisant,

$$2A_0B_0[2(A_0B_2 + B_0A_2) - A_1B_1] = 2\varepsilon\varepsilon' A_0B_0\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}\sqrt{B_1^2 - 4B_0B_2},$$

puis, après suppression du facteur $2A_0B_0$,

$$2(A_0B_2 + B_0A_2) - A_1B_1 = \varepsilon\varepsilon'\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}\sqrt{B_1^2 - 4B_0B_2},$$

puis enfin, par une nouvelle élévation au carré,

$$[2(A_0B_2 + B_0A_2) - A_1B_1]^2 - (A_1^2 - 4A_0A_2)(B_1^2 - 4B_0B_2) = 0,$$

relation dont le premier membre est précisément l'expression (11).

IV. Résultant des deux formes

$$\left. \begin{aligned} A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2, \\ B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

En écrivant que l'expression

$$\begin{aligned} & (A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2)(\beta_0 x^2 + \beta_1 xy + \beta_2 y^2) \\ & + (B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3)(\alpha_0 x + \alpha_1 y) \end{aligned}$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0 \beta_0 & & + B_0 \alpha_0 & = 0, \\ 2A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 & & + 3B_1 \alpha_0 + B_0 \alpha_1 & = 0, \\ A_2 \beta_0 + 2A_1 \beta_1 + A_0 \beta_2 + 3B_2 \alpha_0 + 3B_1 \alpha_1 & & = 0, \\ A_2 \beta_1 + 2A_1 \beta_2 + B_3 \alpha_0 + 3B_2 \alpha_1 & & = 0, \\ A_2 \beta_2 & & + B_3 \alpha_1 & = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant, R, des deux formes (12),

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & B_0 & 0 \\ 2A_1 & A_0 & 0 & 3B_1 & B_0 \\ A_2 & 2A_1 & A_0 & 3B_2 & 3B_1 \\ 0 & A_2 & 2A_1 & B_3 & 3B_2 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & B_3 \end{vmatrix}$$

Le produit $\alpha_0 R$ peut, comme on le vérifiera en effectuant les calculs, se mettre sous la forme suivante, avantageuse dans certaines questions :

$$\left. \begin{aligned} & [A_0^2 B_3 + A_2(3A_0 B_1 - 2B_0 A_1) - A_1(3A_0 B_2 - B_0 A_2)]^2 \\ & - (A_1^2 - A_0 A_2) [(3A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - 4A_0 B_3(3A_0 B_1 - 2B_0 A_1)]^1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

¹ Calcul mnémotechnique de la formule (13).

Posant

$$\begin{aligned} A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2 & = A(x, y), \\ B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3 & = B(x, y), \end{aligned}$$

on remplace le système des deux équations

$$A(x, y) = 0, \quad B(x, y) = 0$$

par le système des deux équations

$$A(x, y) = 0, \quad \frac{A_0 B(x, y) - B_0 x A(x, y)}{y} = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2 & = 0, \\ (3A_0 B_1 - 2B_0 A_1)x^2 + (3A_0 B_2 - B_0 A_2)xy + A_0 B_3 y^2 & = 0. \end{aligned}$$

Si, pour former le résultant des premiers membres de ces deux équations quadratiques, on applique la formule (11), on tombe immédiatement sur l'expression (13).

6bis. — La première partie de notre travail, dont nous venons d'achever l'exposé, avait pour but d'établir la condition nécessaire et suffisante pour que deux formes algébriques binaires, aux indéterminées x, y , admettent, conformément à la définition posée au n° 1, quelque racine commune : dans la deuxième partie, qui suivra prochainement, nous établirons, en nous appuyant sur ce résultat fondamental, les conditions nécessaires et suffisantes pour que, n équations algébriques entières, à l'inconnue x , étant données, il existe quelque valeur de cette inconnue les vérifiant toutes.

NOUVEAUX THÉORÈMES SUR LE VIRIEL DE FORCES ET LEURS APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES

PAR

Farid BOULAD (au Caire).

CLAUSIUS a appelé *viriel de forces*, l'expression suivante : $V = Xx + Yy + Zz$ dans laquelle X, Y, Z désignent les projections d'une force AP liée¹ à un point A sur trois axes $Oxyz$ rectangulaires en un point O dit *pôle*, et x, y, z les coordonnées du point d'application de cette force par rapport à ces axes.

D'après cette expression, le viriel d'une force liée AP relativement à un pôle O , n'est autre que le travail effectué par cette force agissant toujours parallèlement à elle-même, si son point d'origine était déplacé du pôle O au point d'application A de cette force.

Cette même expression a été utilisée d'abord par CLAUSIUS

¹ M. APPELL a donné le nom d'une *force liée à un point*, à une force AP appliquée à un point A déterminé de l'espace. Nous adopterons cette dénomination dans tout ce qui suit.