

SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE

Autor(en): **Daniëls, M.-Fr.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18026>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE

PAR

M.-Fr. DANIELS (Fribourg, Suisse).

Nous nous proposons de démontrer dans cet article qu'on trouve, en utilisant certaines identités vectorielles, non seulement des démonstrations simples et élégantes de théorèmes connus, mais que ces identités, lorsqu'on interprète différemment les vecteurs qu'elles contiennent, conduisent facilement encore à des théorèmes nouveaux.

Dans un second article nous traiterons de la même manière certaines identités grassmanniennes.

1. — Il suffira de se rappeler :

a) qu'un vecteur $(OR) \equiv \mathfrak{r}$, le centre de la sphère étant O , détermine sur la surface sphérique un point et qu'un multiple positif de ce vecteur-unité détermine le même point.

b) qu'une droite sphérique ou grand cercle, parcouru dans le sens indiqué par la flèche, est déterminé par le vecteur $(OL) \equiv \mathfrak{l}$ normal à son plan et que tout multiple positif de ce vecteur-unité détermine la même droite, parcourue dans le même sens.

c) que le vecteur de la droite passant par les points \mathfrak{r} et \mathfrak{r}_1 ,

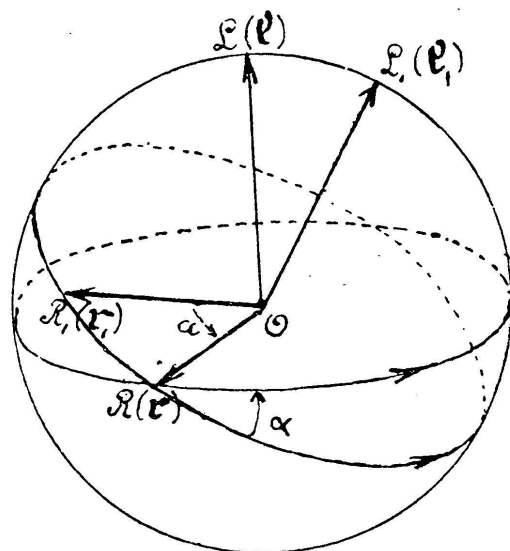


Fig 1

est le produit vectoriel ou externe $V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$, vecteur dont la grandeur est $\sin \alpha$, lorsque α est la distance sphérique minima des points en question.

d) que le vecteur du point d'intersection des droites \mathfrak{f} et \mathfrak{f}_1 est de même $V\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}$, la grandeur de ce vecteur étant $\sin \alpha$ lorsque α est l'angle des deux droites.

e) que le vecteur $\alpha\mathbf{r} - \alpha_1\mathbf{r}_1$ appartient à un point P situé sur la droite déterminée par \mathbf{r} et \mathbf{r}_1 et tel que $\sin(\text{PR}) : \sin(\text{PR}_1) \equiv (\text{RR}_1\text{P}) = \alpha_1 : \alpha$.

f) que le vecteur $\beta\mathfrak{f} - \beta_1\mathfrak{f}_1$ appartient à une droite p passant par l'intersection des droites $l(\mathfrak{f})$ et $l_1(\mathfrak{f}_1)$ et telle que $\sin(pl) : \sin(pl_1) \equiv (ll_1p) = \beta_1 : \beta$.

g) que trois points sont collinéaires et que trois droites sont concourantes lorsque les trois vecteurs correspondants multipliés par certains facteurs donnent une somme nulle.

h) qu'une droite de vecteur \mathfrak{f} ne passe par un point de vecteur \mathbf{r} que lorsque le produit scalaire ou interne de leurs vecteurs est nul.

i) que la droite dont le vecteur est $V\mathbf{r}\mathfrak{f}$ passe par le point \mathbf{r} tout en étant normale à la droite dont le vecteur est \mathfrak{f} .

I

2. — Considérons maintenant les identités vectorielles :

$$\begin{aligned} (\beta_2\mathfrak{f}_2 - \beta_3\mathfrak{f}_3) + (\beta_3\mathfrak{f}_3 - \beta_1\mathfrak{f}_1) + (\beta_1\mathfrak{f}_1 - \beta_2\mathfrak{f}_2) &\equiv 0. \\ (\alpha_2\mathbf{r}_2 - \alpha_3\mathbf{r}_3) + (\alpha_3\mathbf{r}_3 - \alpha_1\mathbf{r}_1) + (\alpha_1\mathbf{r}_1 - \alpha_2\mathbf{r}_2) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Si les vecteurs des côtés et ceux des sommets opposés d'un triangle sphérique sont \mathfrak{f}_i et \mathbf{r}_i , la première nous apprend que trois transversales angulaires, pour lesquelles le produit des rapports est *un* sont concourantes (1, g). Il ressort de la seconde que trois points appartenant aux trois côtés, pour lesquels le produit des rapports est *un*, sont collinéaires.

D'après (1, d) le point d'intersection dans le premier cas est déterminé par le produit vectoriel

$$V(\beta_2\mathfrak{f}_2 - \beta_3\mathfrak{f}_3)(\beta_3\mathfrak{f}_3 - \beta_1\mathfrak{f}_1) \quad \text{ou} \quad \frac{\sin A_1}{\beta_1}\mathbf{r}_1 + \frac{\sin A_2}{\beta_2}\mathbf{r}_2 + \frac{\sin A_3}{\beta_3}\mathbf{r}_3$$

lorsque les angles extérieurs du triangle sphérique sont A_i . Les coordonnées barycentriques du point d'intersection sont par conséquent $\sin A_i / \beta_i$.

De même on trouve dans le second cas pour la droite des trois points le vecteur

$$V(\alpha_2 \mathbf{r}_2 - \alpha_3 \mathbf{r}_3)(\alpha_3 \mathbf{r}_3 - \alpha_1 \mathbf{r}_1) \quad \text{ou} \quad \frac{\sin a_1}{\alpha_1} \mathbf{f}_1 + \frac{\sin a_2}{\alpha_2} \mathbf{f}_2 + \frac{\sin a_3}{\alpha_3} \mathbf{f}_3$$

lorsque les a_i sont les côtés du triangle sphérique. Les coordonnées barycentriques de cette droite sont $1/\alpha_i$. Dans le cas-limite du triangle plan, les $\sin A_i$ et $\sin a_i$ peuvent être remplacés par les côtés a_i eux-mêmes.

3. — a) La première médiane, dont le vecteur a la forme $\beta_2 \mathbf{f}_2 - \beta_3 \mathbf{f}_3$ passe par le milieu du côté opposé $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$. Le produit interne de ces deux vecteurs étant par conséquent $(1, h)$ nul, il s'ensuit :

$$\beta_2 \sin h_2 - \beta_3 \sin h_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \beta_2 \sin A_3 - \beta_3 \sin A_2 = 0$$

lorsque les h_i sont les hauteurs du triangle sphérique. Les trois médianes

$$\sin A_2 \mathbf{f}_2 - \sin A_3 \mathbf{f}_3, \quad \sin A_3 \mathbf{f}_3 - \sin A_1 \mathbf{f}_1, \quad \sin A_1 \mathbf{f}_1 - \sin A_2 \mathbf{f}_2$$

sont donc concourantes ; de même les trois symédianes

$$\frac{\mathbf{f}_2}{\sin A_2} - \frac{\mathbf{f}_3}{\sin A_3}, \quad \frac{\mathbf{f}_3}{\sin A_3} - \frac{\mathbf{f}_1}{\sin A_1}, \quad \frac{\mathbf{f}_1}{\sin A_1} - \frac{\mathbf{f}_2}{\sin A_2}.$$

Les premières passent d'après le paragraphe précédent par le point, dont les coordonnées barycentriques sont $(1, 1, 1)$; les secondes passent par le point de Lemoine ou Græbe $(\sin^2 a_1, \sin^2 a_2, \sin^2 a_3)$ qui, dans le cas-limite du triangle plan, devient (a_1^2, a_2^2, a_3^2) .

b) La droite dont le vecteur $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$ appartient au premier côté du triangle est par là même normale à ce côté ; elle passe par le milieu de ce côté $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, vu que le produit scalaire des deux vecteurs en question est nul $(1, h)$. Le point d'intersection des normales concourantes

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

est déterminé (1, *d*) par le produit externe de deux de ces vecteurs

$$V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 .$$

C'est le centre du cercle circonscrit.

4. — Posons maintenant dans notre identité du paragraphe 2

$$\alpha_1 \equiv \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = \cos a_1 \quad \alpha_2 \equiv \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1 = \cos a_2 \quad \alpha_3 \equiv \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \cos a_3 .$$

Elle prendra alors la forme¹

$$V\mathbf{r}_1 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_2 V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_3 V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \equiv 0 \quad (\text{II})$$

ou encore

$$V\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \equiv 0$$

lorsque pour éviter une accumulation de V, on n'écrit que le dernier en remplaçant les autres par des virgules. Or, $V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ est le premier côté et $V\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ d'après (1, *i*) la normale abaissée sur cette droite du sommet opposé \mathbf{r}_1 ; l'identité nous apprend donc que dans un triangle sphérique les trois hauteurs sont concourantes. L'orthocentre x_i étant sur la première hauteur, nous avons, en écrivant par abréviation s_i et S_i , c_i et C_i pour $\sin a_i$, $\sin A_i$, $\cos a_i$ et $\cos A_i$ d'après (1, *h*)

$$\begin{aligned} (x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3) \cdot V\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 &\equiv x_3 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 - x_2 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \\ &= x_3 s_1 s_2 C_3 - x_2 s_1 s_3 C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \text{tang } A_1 : \text{tang } A_2 : \text{tang } A_3 .$$

5. — En multipliant l'identité du paragraphe précédent scalairement par le vecteur \mathbf{r}_4 , nous obtenons la nouvelle identité :

$$V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_4 \cdot V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_4 \cdot V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4 \cdot V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \equiv 0 . \quad (\text{III})$$

Elle nous apprend d'abord : si dans un quadrangle complet $(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4)$ sphérique ou plan non seulement les côtés $(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)$ et $(\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4)$ sont *perpendiculaires ou conjugués par rapport à une conique sphérique ou plane*, mais encore les côtés $(\mathbf{r}_2\mathbf{r}_4)$

¹ On a en effet $\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \equiv V\mathbf{r}_1 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$.

et $(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1)$, il en sera de même des côtés $(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)$ et $(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)$, vu que la disparition des deux premiers produits scalaires entraîne celle du dernier.

On peut évidemment écrire notre identité :

$$V\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_4 \cdot V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3 + V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_4 \cdot V\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_1 + V\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_4 \cdot V\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \equiv 0$$

et considérer les vecteurs comme appartenant aux quatre côtés d'un quadrilatère sphérique complet. Dans ce cas les six produits vectoriels déterminent les sommets $(1, d)$, et l'identité nous apprend : si les distances des sommets $V\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_4$ et $V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3$ et des sommets $V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_4$ et $V\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_1$ sont des quadrants, ou bien si ces sommets sont conjugués deux à deux par rapport à une conique il en est de même pour les sommets $V\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_4$ et $V\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2$.

6. — Reprenons encore l'identité I et posons-y :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= V\mathbf{r}_2 \mathbf{f} \cdot V\mathbf{r}_3 \mathbf{f} \equiv \mathbf{r}_2 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_3 \equiv \mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_2 \\ \alpha_2 &= V\mathbf{r}_3 \mathbf{f} \cdot V\mathbf{r}_1 \mathbf{f} \equiv \mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}_1 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_3 \\ \alpha_3 &= V\mathbf{r}_1 \mathbf{f} \cdot V\mathbf{r}_2 \mathbf{f} \equiv \mathbf{r}_1 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}_2 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_1 \end{aligned}$$

Nous rappelant que

$$\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$$

est le produit externe des vecteurs

$$\times \quad \text{et} \quad V\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$$

nous voyons sans peine qu'un des trois termes de notre identité avec un changement de signe devient le produit externe des vecteurs :

$$V\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \quad \text{et} \quad V\mathbf{f}, \mathbf{r}_1$$

ou encore¹ de

$$\mathbf{f}_1 \quad \text{et} \quad V\mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3 .$$

L'identité toute entière prend par conséquent la forme :

$$V\mathbf{f}_1, \mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3 + V\mathbf{f}_2, \mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}_3 \mathbf{f}_1 + V\mathbf{f}_3, \mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \equiv 0 \quad \text{(IV)}$$

¹ Se rappeler que $V\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 = \sin a_1 \mathbf{f}_1$ et $V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3 = \sin A_1 \mathbf{r}_1$. On multiplie donc en réalité par le module du triangle sphérique des \mathbf{r}_i , c'est-à-dire par $\sin A_i : \sin a_i$.

L'interprétation géométrique de cette identité est bien simple. En effet, si les \mathfrak{f}_i sont les côtés d'un trilatère sphérique et si \mathfrak{f} est le vecteur d'une droite quelconque l , on a successivement pour le premier sommet A_1 , pour la normale p_1 abaissée sur la droite l , pour son intersection P_1 avec l , et pour la normale q_1 du point P_1 sur le premier côté du triangle, en appliquant alternativement (1, d) et (1, i)

$$A_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3, \quad p_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3, \quad P_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3, \quad q_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3.$$

Nous obtenons deux droites analogues q_2, q_3 en partant des deux autres sommets du trilatère. L'identité nous apprend que les trois droites sphériques q_i sont concourantes. Leur point commun est l'*orthopôle de la droite sphérique*¹. D'après l'extension connue donnée au produit externe de deux vecteurs, l'identité IV peut encore s'interpréter de la manière suivante :

Si l'on mène par les sommets A_i des droites p_i , conjuguées à une droite quelconque l par rapport à une conique donnée, les points d'intersection étant P_i , les droites q_i , qui passant par les P_i sont conjuguées aux côtés a_i du triangle sphérique passent par un point.

7. — On trouve les coordonnées barycentriques x_i de l'orthopôle correspondant à la droite sphérique u_i en formant (1, d) le produit externe de

$$q_1 \equiv \alpha_2 \mathfrak{r}_2 - \alpha_3 \mathfrak{r}_3 \quad \text{et} \quad q_2 \equiv \alpha_3 \mathfrak{r}_3 - \alpha_1 \mathfrak{r}_1$$

c'est-à-dire qu'on a d'une manière générale

$$x_1 \mathfrak{r}_1 + x_2 \mathfrak{r}_2 + x_3 \mathfrak{r}_3 = \alpha_2 \alpha_3 \mathfrak{V}\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 + \alpha_3 \alpha_1 \mathfrak{V}\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 + \alpha_1 \alpha_2 \mathfrak{V}\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$$

ce qui, multiplié successivement par

$$\mathfrak{V}\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3, \quad \mathfrak{V}\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{V}\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$$

¹ M. J. NEUBERG a énoncé ce théorème en 1875 dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (démonstration par H. van AUBEL, *N. C. M.*, t. II, p. 316, et par E. LEMOINE, *J. M. E.*, 1884, p. 50). Il a étudié la correspondance entre l'orthopolaire et l'orthopôle dans la *N. C. M.*, 1878, p. 379. (Voir *Mathesis*, t. IV, avril 1914, p. 92.)

donne pour les coordonnées de l'orthopôle

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 \\ &= \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{11} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{12} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{13} \\ &: \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{12} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{22} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{23} \\ &: \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{13} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{23} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{33} \end{aligned}$$

si l'on pose par abréviation pour les coefficients des produits $\alpha_r \alpha_s$

$$\Omega_{ik} \equiv \sin a_i \sin a_k \cos A_{ik} \equiv \Omega_{ki} .$$

Il suffira maintenant de se rappeler que Δ étant $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3]$, nous avons :

$$\alpha_1 \equiv \text{Vr}_2 \mathbf{f}_1 \cdot \text{Vr}_3 \equiv \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 \quad \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = \Delta^2 u_2 u_3 - \cos a_1 \Omega(uu) .$$

La première coordonnée x_1 de l'orthopôle devient alors la somme de

$$\begin{aligned} \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{11} &= [\Delta^4 u_1^2 u_2 u_3 - \Delta^2 (c_2 u_1 u_2 + c_3 u_1 u_3) \Omega(uu) + c_2 c_3 \Omega^2(uu)] s_1 s_1 \\ \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{12} &= [\Delta^4 u_2^2 u_3 u_1 - \Delta^2 (c_3 u_2 u_3 + c_1 u_2 u_1) \Omega(uu) + c_3 c_1 \Omega^2(uu)] s_1 s_2 C_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{13} &= [\Delta^4 u_3^2 u_1 u_2 - \Delta^2 (c_1 u_3 u_1 + c_2 u_3 u_2) \Omega(uu) + c_1 c_2 \Omega^2(uu)] s_1 s_3 C_2 \end{aligned}$$

8. — Lorsqu'on passe au cas-limite du plan, les termes qui contiennent la quatrième puissance de

$$\Delta \equiv \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik}$$

deviennent infiniment petits par rapport aux autres. Il ne reste, lorsqu'on pose

$$\lim \Delta \equiv \lim \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik} = \sin A_i \sin A_k \cdot a_{ik} \equiv \bar{\Delta} \quad \text{et} \quad \lim \cos a_i = 1$$

qu'une première partie qui devient à la limite

$$-\bar{\Delta}^2 a_1 [(a_2 C_3 + a_3 C_2) u_2 u_3 + (a_1 + a_3 C_2) u_3 u_1 + (a_1 + a_2 C_3) u_1 u_2]$$

ou

$$\bar{\Delta}^2 a_1 [a_1 u_2 u_3 + a_2 \cos A_3 \cdot u_3 u_1 + a_3 \cos A_2 \cdot u_1 u_2]$$

et d'une seconde partie du même ordre

$$\begin{aligned} \Omega(uu) [c_2 c_3 (1 - c_1^2) + c_1 c_2 (c_1 c_3 - c_2) + c_1 c_3 (c_1 c_2 - c_3)] \equiv \\ \Omega(uu) (c_1 c_2 - c_3) (c_1 c_3 - c_2) \equiv \Omega(uu) \sin^2 a_1 \sin a_2 \sin a_3 \cos A_2 \cos A_3 \end{aligned}$$

qui devient à la limite $a_1^2 a_2 a_3 \cos A_2 \cos A_3 \cdot \Omega(uu)$. Si enfin nous introduisons au lieu des coordonnées u_i de la droite ses distances p_i aux sommets du triangle en posant¹ $\bar{\Delta}u_i = \sqrt{\Omega(uu)} \cdot p_i$ nous obtenons comme première coordonnée barycentrique de l'orthopôle

$$a_1 [a_1 a_2 a_3 C_2 C_3 + a_1 p_2 p_3 + a_3 C_2 p_1 p_2 + a_2 C_3 p_1 p_3] .$$

Les deux autres s'en déduisent par permutation cyclique des indices.

9. — Lorsqu'il s'agit inversement de trouver la droite sphérique $\mathfrak{f}(u_i)$, son orthopôle \mathfrak{r}_0 étant donné, il suffira d'exprimer que \mathfrak{r}_0 est situé sur les droites q_i , ce qui fournit les équations

$$\mathfrak{r}_0 \nabla \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{r}_1 \equiv [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_1] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r}_1 + [\mathfrak{f}_1 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 \nabla \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}, \mathfrak{r}_2 \equiv [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_2] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r}_2 + [\mathfrak{f}_2 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_2] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 \nabla \mathfrak{f}_3, \mathfrak{f}, \mathfrak{r}_3 \equiv [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_3] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r}_3 + [\mathfrak{f}_3 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_3] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 0$$

du second degré par rapport aux u_i . Lorsqu'une droite u_i satisfait à deux de ces équations, elle suffira à cause de l'identité (IV) également à la troisième. Il y a donc sur la sphère quatre *orthopolaires* correspondant au point \mathfrak{r}_0 comme orthopôle; ce sont les tangentes communes aux courbes de seconde classe.

Il est facile de trouver les six foyers des trois coniques sphériques². En effet, $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} \equiv \Omega(uu) = 0$ étant l'équation de la courbe absolue, le premier terme dans chacune de ces équations égalé à zéro, donne l'équation de deux foyers, de sorte que les six foyers en question sont :

$$\mathfrak{r}_1, \nabla \mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_1; \quad \mathfrak{r}_2, \nabla \mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_2; \quad \mathfrak{r}_3, \nabla \mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_3 .$$

Trois de ces foyers coïncident avec les sommets; les trois autres sont situés sur les côtés du triangle à des distances $\pi/2$ du point \mathfrak{r}_0 . Lorsqu'on passe au plan, les trois derniers

¹ Soit : $\sin A_1 \cdot u_1 \mathfrak{f}_1 + \sin A_2 \cdot u_2 \mathfrak{f}_2 + \sin A_3 \cdot u_3 \mathfrak{f}_3 = u_4 \mathfrak{f} = \sqrt{\Omega(uu)} \cdot \mathfrak{f}$. En multipliant par \mathfrak{r}_1 nous aurons $\sin A_1 \sin h_1 u_1 = u_4 \sin p_1$ ou $\bar{\Delta} \cdot u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} \sin p_1$ et $\bar{\Delta} \cdot u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} \cdot p_1$.

² « Essai de géométrie sphérique », p. 250-251.

foyers s'éloignent à l'infini; dans le plan les coniques sont par conséquent des paraboles ayant leurs foyers aux sommets du triangle et leurs axes parallèles aux côtés opposés.

10. — Si dans l'identité IV on prend, au lieu des quatre droites, quatre points, c'est-à-dire au lieu du trilatère \mathfrak{f}_i et de la droite \mathfrak{f} , le triangle \mathfrak{r}_i et le point \mathfrak{r} , on obtient

$$V_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3} + V_{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1} + V_{\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2} \equiv 0 ,$$

identité qui exprime simplement le théorème réciproque; nous n'en parlons pas.

11. — Nous arrivons à un autre théorème qu'on pourrait appeler le théorème *semi-réciproque*, en gardant dans notre identité les côtés du trilatère \mathfrak{f}_i , mais en remplaçant la droite quelconque \mathfrak{f} par un point quelconque \mathfrak{r} . Dans sa nouvelle forme :

$$V_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} + V_{\mathfrak{f}_2, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_1} + V_{\mathfrak{f}_3, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2} \equiv 0 , \quad (\text{V})$$

l'identité nous apprend : *Lorsque par un point quelconque P(\mathfrak{r}) d'un triangle sphérique ou plan A_i on fait passer des droites q_i normales ou conjuguées aux droites $p_i \equiv A_i P$, leurs points d'intersection Q_i avec les côtés correspondants sont collinéaires¹.*

En effet, on a successivement pour le sommet A_1 , pour la droite p_1 , pour la normale q_1 et pour son point d'intersection Q_1 avec le premier côté du triangle

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv V_{\mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} , & p_1 &\equiv V_{\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} \\ q_1 &\equiv V_{\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} , & Q_1 &\equiv V_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} , \end{aligned}$$

L'identité V nous montre que le point Q_1 et les deux autres Q_2 et Q_3 qu'on obtient en partant des sommets A_2 et A_3 sont bien collinéaires. q. e. d.

¹ Voir encore ma « Note sur la géométrie du triangle et du tétraèdre » dans l'*Ens. Math.*, 1917, pp. 273-275, à propos de laquelle M. A. KIEFER m'a fait remarquer que pour le cas spécial où P est le centre du cercle inscrit, le théorème se trouve chez Steiner parmi les « Vermischte Sätze und Aufgaben » (*Ges. Werke*, Bd. 2, S. 673) et chez A. KIEFER, « Ueber eine Dreiecksaufgabe und bezügliche Sätze » (*Archiv der Mathematik und Physik*, III, Reihe XII, Heft 1, S. 30).

12. — Si les coordonnées x_i du point \mathbf{r} sont données, il est facile d'exprimer les coordonnées u_i de la droite correspondante en fonction des x_i . Nous devons en effet chercher la droite sphérique qui relie les points

$$Q_1 \equiv \alpha_2 \mathbf{r}_2 - \alpha_3 \mathbf{r}_3 ; \quad Q_2 \equiv \alpha_3 \mathbf{r}_3 - \alpha_1 \mathbf{r}_1$$

lorsque les coefficients α_i sont déterminés par les équations :

$$\alpha_1 = \mathbf{Vr}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_3 ; \quad \alpha_2 = \mathbf{Vr}_3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_1 ; \quad \alpha_3 = \mathbf{Vr}_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_2 .$$

Nous trouvons son vecteur en formant le produit vectoriel ou externe. Ceci nous permet de conclure (2), que les coordonnées u_i de la droite cherchée satisfont à

$$u_1 : u_2 : u_3 = \alpha_2 \alpha_3 : \alpha_3 \alpha_1 : \alpha_1 \alpha_2 .$$

Quant aux coefficients α_i , on voit donc sans peine que

$$\alpha_1 \equiv \mathbf{Vr}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_3 \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3 - \cos a_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \omega(x_2) \omega(x_3) - \cos a_1 \omega(xx)$$

pourvu que $\omega(x_2)$ et $\omega(x_3)$ soient les demi-dérivées partielles par rapport à x_2 et x_3 de la forme quadratique

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \equiv \omega(xx) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cos a_1 x_2 x_3 + 2\cos a_2 x_3 x_1 + 2\cos a_3 x_1 x_2 \\ &\equiv (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - \dots = l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - \dots \end{aligned}$$

13. — Dans le cas-limite du plan la valeur trouvée pour α_1

$$\begin{aligned} &\left(l_\infty - 2x_1 \sin^2 \frac{a_3}{2} - 2x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} \right) \left(l_\infty - 2x_2 \sin^2 \frac{a_1}{2} - 2x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} \right) \\ &- \left(1 - 2\sin^2 \frac{a_1}{2} \right) \left(l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - 4x_3 x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} - \dots \right) \end{aligned}$$

devient

$$x_1^2 (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + x_1 x_2 (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) + x_1 x_3 (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) + 2x_2 x_3 a_1^2$$

etc. Nous pouvons cependant donner aux α_i , donc aux u_i de la droite, une forme plus simple. Nous avons en effet :

$$\alpha_1 \equiv \mathbf{Vr}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_3 = -\sin PA_2 \sin PA_3 \cdot \cos \Phi_1$$

si nous appelons Φ_1 l'angle formé par les droites PA_2 et PA_3 .

De cette manière nous trouvons pour le cas de la sphère

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\sin PA_1}{\cos \Phi_1} : \frac{\sin PA_2}{\cos \Phi_2} : \frac{\sin PA_3}{\cos \Phi_3}$$

et dans le cas d'un triangle plan.

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{PA_1}{\cos \Phi_1} : \frac{PA_2}{\cos \Phi_2} : \frac{PA_3}{\cos \Phi_3}$$

14. — Reprenons l'identité (V) et multiplions-la scalairement par le vecteur quelconque \mathfrak{f}_4 . Dans sa nouvelle forme¹

$$V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4 + V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_1 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_4 + V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_4 \equiv 0 \quad (\text{VI})$$

l'identité nous fournit une démonstration très simple du *théorème*, généralisé pour la sphère, de *Bodenmiller*²:

Le lieu géométrique du point P tel que les droites sphériques qui le relient à deux points donnés de la surface sphérique sont normales ou conjuguées est une conique; les trois coniques qui correspondent aux trois couples de sommets d'un quadrilatère appartiennent à un même faisceau.

En effet, lorsque les côtés du quadrilatère sont \mathfrak{f}_i ($i = 1, 2, 3, 4$), nous aurons en $V\mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3$ et $V\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4$ deux sommets opposés. Les droites qui le relient au point \mathfrak{r} sont $V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3$ et $V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4$, et ces droites sont normales (ou conjuguées) lorsque \mathfrak{r} satisfait à l'équation de la conique

$$V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4 = 0.$$

Nous obtenons d'autres coniques en partant des deux autres couples de sommets opposés; l'identité nous montre que les points communs aux deux premières satisfont également à la troisième, ou bien que les trois coniques appartiennent à un même faisceau.

¹ Il est en effet

$$\mathfrak{f}_4 \cdot V\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{f}_4 \mathfrak{f}_1 \equiv -V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_4 \mathfrak{f}_1.$$

² C. GUDERMANN. *Grundriss der analytischen Sphärik*, 1830, S. 138.

II

15. — Les identités étudiées dans le chapitre précédent sont toutes des conséquences de l'identité (I). Nous arrivons maintenant à une relation identique entre six vecteurs qui ne peut pas être ramenée à la même source. Supposons en effet que nous ayons quatre vecteurs quelconques $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Le vecteur composé

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3] \mathbf{r}_0 - [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_0] \mathbf{r}_1 + [\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1] \mathbf{r}_2 - [\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] \mathbf{r}_3$$

est nul, vu que ses projections sur les trois vecteurs non-coplanaires

$$V_{\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3}, \quad V_{\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1}, \quad V_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}$$

sont nulles. Dès lors sa projection sur tout autre vecteur $V_{\mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5}$ disparaît également, et nous aurons l'identité :

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3][\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5] - [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_0][\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5] + [\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5] - [\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2][\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5] \equiv 0 \quad (\text{VII})$$

qui constitue une relation entre les « sinus » de huit parmi les « angles trièdres » qu'on obtient en reliant six points de la surface sphérique au centre. Lorsqu'on remplace chacun des produits pseudoscalaires par le déterminant correspondant, on retrouve l'identité bien connue entre huit déterminants de *Cayley*.

16. — Dans le cas spécial où deux des six points en question, \mathbf{r}_0 et \mathbf{r}_5 par exemple, coïncident, l'identité devient

$$[\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4][\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3] + [\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_4][\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1] + [\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4][\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] \equiv 0. \quad (\text{VIII})$$

Elle établit une relation entre les sinus de six parmi les angles trièdres formés, lorsque les sommets d'un pentagone sphérique sont reliés au centre de la sphère. Or, un produit pseudoscalaire comme $[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3]$ étant égal à $\sin a_1 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1$ ou $\sin a_1 \sin h_1$ devient dans le cas-limite du plan proportionnel à l'aire du triangle plan correspondant. L'identité (VIII) nous fournit alors la relation bien connue entre les triangles d'un pentagone plan de *Möbius*¹.

¹ A. F. MÖBIUS. *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 202.

17. — Nous allons voir maintenant que notre dernière identité admet une interprétation toute différente. En effet, soient $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ les sommets, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ les côtés du triangle de référence sphérique et

$$\begin{aligned} B_1 \mathbf{r}_1 + B_2 \mathbf{r}_2 + B_3 \mathbf{r}_3 &\equiv \mathfrak{B} & \sin A_1 b_1 \mathbf{f}_1 + \sin A_2 b_2 \mathbf{f}_2 + \sin A_3 b_3 \mathbf{f}_3 &\equiv \mathfrak{b} \\ \sin A_1 u_1 \mathbf{f}_1 + \sin A_2 u_2 \mathbf{f}_2 + \sin A_3 u_3 \mathbf{f}_3 &\equiv \mathfrak{f} & x_1 \mathbf{r}_1 + x_2 \mathbf{r}_2 + x_3 \mathbf{r}_3 &\equiv \mathbf{r} \end{aligned}$$

si nous posons comme toujours le produit pseudoscalaire $[\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3] \equiv \Delta$, la multiplication interne des vecteurs superposés nous permet d'écrire :

$$(\mathfrak{B} \mathfrak{f})^n = \Delta^n (B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3)^n \quad (\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r})^n = \Delta^n (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^n$$

de sorte que l'équation d'une courbe sphérique de classe ou d'ordre n , avec la convention $b_i b_j b_k \dots \equiv b_{i,j,k,\dots}$, etc., peut s'écrire

$$(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{f})^n = 0 \quad (\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r})^n = 0 .$$

La droite sphérique qui relie les points \mathbf{r}' et \mathbf{r}'' coupera la conique sphérique $(\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r})^2 = 0$ en un point $\mathbf{r}' + \lambda \mathbf{r}''$ pourvu que λ satisfasse à

$$(\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r}' + \lambda \mathbf{r}'')^2 \equiv (\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r}')^2 + 2\lambda (\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r}') (\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r}'') + \lambda^2 (\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r}'')^2 = 0 .$$

Les points \mathbf{r}' et \mathbf{r}'' sont conjugués par rapport à la conique lorsque

$$(\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r}') (\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r}'') = 0 .$$

18. — Revenons maintenant à l'identité (VIII), que nous écrivons

$$[\mathfrak{b} \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_4][\mathfrak{b} \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3] + [\mathfrak{b} \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_4][\mathfrak{b} \mathbf{f}_3 \mathbf{f}_1] + [\mathfrak{b} \mathbf{f}_3 \mathbf{f}_4][\mathfrak{b} \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2] \equiv 0 .$$

Dans cette forme elle nous donne le théorème connu : Si dans un quadrilatère complet de sommets $V \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_4, V \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3$, etc., deux couples de sommets opposés sont conjugués par rapport à une conique sphérique ou plane $(\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r})^2 = 0$, il en est de même pour le troisième. Il est évident qu'on obtient le théorème réciproque, lorsqu'on remplace les $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathfrak{b}$ par $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ et \mathfrak{B} .

19. — On peut arriver à ce résultat, qui d'ailleurs a déjà été obtenu au paragraphe 5, d'une autre manière encore. En

effet, si $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ sont les points diagonaux d'un quadrilatère complet, les sommets seront

$$\lambda_2 \mathbf{r}_2 \pm \lambda_3 \mathbf{r}_3, \quad \lambda_3 \mathbf{r}_3 \pm \lambda_1 \mathbf{r}_1, \quad \lambda_1 \mathbf{r}_1 \pm \lambda_2 \mathbf{r}_2$$

et, si \mathfrak{b} est toujours le vecteur symbolique du paragraphe 17, l'identité

$$\begin{aligned} & \mathfrak{b} \cdot (\lambda_2 \mathbf{r}_2 + \lambda_3 \mathbf{r}_3) \mathfrak{b} \cdot (\lambda_2 \mathbf{r}_2 - \lambda_3 \mathbf{r}_3) + \mathfrak{b} \cdot (\lambda_3 \mathbf{r}_3 + \lambda_1 \mathbf{r}_1) \mathfrak{b} \cdot (\lambda_3 \mathbf{r}_3 - \lambda_1 \mathbf{r}_1) \\ & + \mathfrak{b} \cdot (\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2) \mathfrak{b} \cdot (\lambda_1 \mathbf{r}_1 - \lambda_2 \mathbf{r}_2) \equiv 0 \end{aligned}$$

nous apprend que les sommets $\lambda_1 \mathbf{r}_1 \pm \lambda_2 \mathbf{r}_2$ sont conjugués par rapport à certaine conique, lorsque les points $\lambda_2 \mathbf{r}_2 \pm \lambda_3 \mathbf{r}_3$ et les points $\lambda_3 \mathbf{r}_3 \pm \lambda_1 \mathbf{r}_1$ le sont.

20. — Remarquons encore en passant que les équations

$$(\mathfrak{V}\mathfrak{b}\mathfrak{f})^2 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathfrak{V}\mathfrak{B}\mathfrak{r})^2 = 0$$

aussi ont une signification géométrique bien simple, lorsque \mathfrak{b} et \mathfrak{B} sont les vecteurs symboliques du paragraphe 17. En effet nous trouvons

$$\begin{aligned} (\mathfrak{V}\mathfrak{b}\mathfrak{f})^2 & \equiv [V(S_1 b_1 \mathfrak{f}_1 + S_2 b_2 \mathfrak{f}_2 + \dots)(S_1 u_1 \mathfrak{f}_1 + S_2 u_2 \mathfrak{f}_2 + \dots)]^2 \\ & \equiv S_1^2 S_2^2 S_3^2 [(b_2 u_3 - b_3 u_2) \mathbf{r}_1 + (b_3 u_1 - b_1 u_3) \mathbf{r}_2 + (b_1 u_2 - b_2 u_1) \mathbf{r}_3]^2 \end{aligned}$$

ou encore, si nous remplaçons $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k$, c'est-à-dire ω_{ik} par $\omega_i \omega_k$, pour la première équation

$$\begin{aligned} & \omega_{11} (b_2 u_3 - b_3 u_2)^2 + \dots + 2\omega_{12} (b_2 u_3 - b_3 u_2) (b_3 u_1 - b_1 u_3) + \dots \\ & \equiv [\omega_1 (b_2 u_3 - b_3 u_2) + \omega_2 (b_3 u_1 - b_1 u_3) + \omega_3 (b_1 u_2 - b_2 u_1)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est celle du lieu géométrique des cordes de longueur $\frac{\pi}{2}$ dans la conique sphérique $(\mathfrak{b} \cdot \mathbf{r})^2 = 0$. De même on trouve

$$(\mathfrak{V}\mathfrak{B}\mathfrak{r})^2 \equiv [\Omega_1 (B_2 x_3 - B_3 x_2) + \Omega_2 (B_3 x_1 - B_1 x_3) + \Omega_3 (B_1 x_2 - B_2 x_1)]^2 = 0$$

comme équation du lieu géométrique des points où les tangentes menées à la courbe sphérique $(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{f})^2 = 0$ sont normales¹.

21. — L'identité (VIII) entre cinq vecteurs conduit à un autre *théorème connu sur les quadrangles complets*, lors-

¹ *Géométrie sphérique en coordonnées projectives*, p. 217.

qu'on y remplace \mathbf{r}_0 par $V\mathfrak{b}\mathfrak{f}$. En tenant compte de ce que

$$[\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4] = V\mathfrak{b}\mathfrak{f} \cdot V\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4 = \mathfrak{b} \cdot V\mathfrak{f} \cdot \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4$$

nous trouvons en effet qu'elle prend la forme

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{b} \cdot V\mathfrak{f}, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4][\mathfrak{b} \cdot V\mathfrak{f}, \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3] + [\mathfrak{b} \cdot V\mathfrak{f}, \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_4][\mathfrak{b} \cdot V\mathfrak{f}, \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1] \\ & + [\mathfrak{b} \cdot V\mathfrak{f}, \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4][\mathfrak{b} \cdot V\mathfrak{f}, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] \equiv 0 . \end{aligned}$$

Or, si \mathfrak{f} est une droite sphérique quelconque, le point d'intersection de cette droite avec le côté $(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_k)$ du quadrangle complet des \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, 3, 4$), point que nous voulons appeler P_{ik} , sera $V\mathfrak{f}, \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k$. L'identité nous apprend la propriété connue de l'involution des six points

$$P_{14}, P_{23}; \quad P_{24}, P_{31}; \quad P_{34}, P_{12}$$

pourvu que \mathfrak{b} soit toujours le vecteur symbolique du paragraphe 17 correspondant à certain conique.

III

22. — Nous arrivons maintenant à une identité nouvelle, qui admet plusieurs interprétations et qui, peut-être plus que les précédentes, montre tout le profit qu'on peut tirer de ces relations vectorielles, non seulement pour démontrer facilement et pour relier entre eux des théorèmes assez différents connus, mais encore pour en trouver des nouveaux.

C'est l'identité

$$[V\mathbf{a}\mathbf{a}' V\mathfrak{b}\mathfrak{b}' V\mathbf{c}\mathbf{c}'] + [V\mathfrak{b}\mathbf{c}' V\mathbf{c}\mathbf{a}' V\mathbf{a}\mathfrak{b}'] + [V\mathbf{c}\mathfrak{b}' V\mathbf{a}\mathbf{c}' V\mathfrak{b}\mathbf{a}'] \equiv 0 . \quad (\text{IX})$$

La démonstration en est simple, quand on remarque que le second et le troisième terme se déduisent du premier par permutation circulaire positive des vecteurs $\mathbf{a}, \mathfrak{b}, \mathbf{c}$ et par permutation circulaire négative des vecteurs $\mathbf{a}', \mathfrak{b}', \mathbf{c}'$. Nous obtenons ainsi en développant les trois produits pseudo-scalaires

$$\begin{aligned} & [\mathbf{a}\mathbf{a}'\mathbf{c}'][\mathfrak{b}'\mathfrak{b}\mathbf{c}] - [\mathbf{a}'\mathbf{a}\mathbf{c}][\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathbf{c}'] \\ & [\mathfrak{b}\mathbf{c}'\mathfrak{b}'][\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{a}] - [\mathbf{c}'\mathfrak{b}\mathbf{a}][\mathbf{c}\mathbf{a}'\mathfrak{b}'] \\ & [\mathbf{c}\mathfrak{b}'\mathbf{a}'][\mathbf{c}'\mathbf{a}\mathfrak{b}] - [\mathfrak{b}'\mathbf{c}\mathfrak{b}][\mathbf{a}\mathbf{c}'\mathbf{a}'] \end{aligned}$$

dont la somme est identiquement nulle.

23. — *Applications.* — 1. Si les vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} déterminent les *sommets* A_i d'un premier, \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' les *sommets* B_i d'un second triangle sphérique ou plan, les produits vectoriels du premier et du second terme désignent les trois droites $A_i B_i$ resp. $A_i B_{i+1}$, etc. L'identité tout entière nous apprend que *les triangles sont triplement perspectifs, lorsqu'ils sont doublement perspectifs*, autrement dit: lorsque les droites (A_i, B_i) et les droites $(A_i B_{i+1})$ sont concourantes, il en est de même des droites (A_i, B_{i-1}) , car la disparition des deux premiers termes de l'identité entraîne celle du dernier.

2. Si les vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} déterminent les *sommets* A_i d'un premier, \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' les *côtés* a'_i d'un second triangle sphérique ou plan, les produits vectoriels du premier terme désignent les normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_i , etc., et la même identité nous apprend que *deux triangles sphériques ou plans sont triplement orthologiques lorsqu'ils sont doublement orthologiques*, autrement dit: lorsque les normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_i et les normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_{i+1} sont concourantes; il en est de même des normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_{i-1} .

3. Supposons en troisième lieu que nous ayons deux triangles sphériques ou plans, dont les sommets sont A_i , A'_i et les côtés a_i , a'_i . Supposons en outre que les vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} déterminent les *sommets* du premier, \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' les « *milieux extérieurs* »¹ du second triangle. Dans ce cas les produits externes du premier terme de notre identité sont trois droites par les A_i et « parallèles » aux a'_i , de même ceux du second terme désignent trois droites passant par les A_i et « parallèles » aux a'_{i+1} , ceux du troisième terme enfin correspondent aux droites qui, passant par les A_i sont « parallèles » aux a'_{i-1} .

On dit que deux triangles sont simplement métaparallèles, lorsque les trois premières droites sont concourantes, doublement lorsque les trois droites suivantes sont également

¹ Nous entendons par « milieu extérieur » du côté $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ du triangle sphérique le point $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$ qui est à une distance $\pi/2$ du « milieu intérieur » $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$.

concourantes, triplement enfin lorsque les trois dernières le sont aussi. Or, notre identité nous apprend : *lorsque deux triangles sphériques ou plans sont doublement métaparallèles, ils sont aussi triplement métaparallèles*¹.

4. Une application toute différente de notre identité nous est fournie par la théorie des coniques. Soient

$$\begin{array}{cccccc} a & c' & b & a' & c & b' & (a) \\ r_2 & r_1' & r_3 & r_2' & r_1 & r_3' & (r_2) \end{array}$$

les vecteurs des *côtés* et des *sommets* d'un hexagone inscrit dans une conique sphérique ou plane. Dans ce cas les points d'intersection

$$V_{aa'}, \quad V_{bb'}, \quad V_{cc'}$$

sont collinéaires d'après le théorème de Pascal, et notre identité (IX) nous donne

$$[V_{bc'} V_{ca'} V_{ab'}] + [V_{cb'} V_{ac'} V_{ba'}] = 0.$$

Or, si nous remarquons 1° que chaque terme de cette équation contient les six vecteurs une seule fois, 2° que b, c' , etc., sont, abstraction faite de certains coefficients scalaires,

$$V_{r_1' r_3}, \quad V_{r_2 r_1'}, \quad V_{r_2' r_1}, \quad V_{r_3 r_2'}, \quad V_{r_3' r_2}, \quad V_{r_1 r_3'},$$

3° que par conséquent les six produits vectoriels qui se trouvent dans la dernière équation peuvent être remplacés par

$$\begin{array}{ccc} [r_1' r_2 r_3] r_1', & [r_1 r_2' r_3] r_2', & [r_1 r_2 r_3'] r_3' \\ - [r_1 r_2' r_3'] r_1, & - [r_1' r_2 r_3] r_2, & - [r_1' r_2' r_3] r_3 \end{array}$$

nous voyons sans peine que la dernière équation donne pour la sphère comme pour le plan *le théorème de Pappus*, d'après lequel pour six points r_i et r_i' d'une conique

$$[r_1' r_2 r_3][r_1 r_2' r_3][r_1 r_2 r_3'] [r_1' r_2' r_3] = [r_1 r_2' r_3'] [r_1' r_2 r_3] [r_1' r_2' r_3] [r_1 r_2 r_3].$$

Il est évident que nous obtenons un autre hexagone ins-

¹ Pour deux triangles plans voir J. NEUBERG, *Mathesis*, 1883, p. 216, 1886, p. 134, 1914, p. 92.

crit dans la même conique en soumettant les r_1, r_2, r_3 seuls à une permutation circulaire; dans ce cas nous trouvons :

$$[r_1 r_3 r_1][r_2 r_2 r_1][r_2 r_3 r_3][r_1 r_2 r_3] = [r_2 r_2 r_3][r_1 r_3 r_3][r_1 r_2 r_1][r_1 r_2 r_3].$$

La division des deux dernières équations conduit pour six points d'une conique sphérique à la relation

$$\frac{[r_1 r_2 r_3][r_1 r_2 r_3][r_1 r_2 r_3]}{[r_1 r_3 r_1][r_2 r_2 r_1][r_2 r_3 r_3]} = \frac{[r_1 r_2 r_3][r_1 r_2 r_3][r_1 r_2 r_3]}{[r_2 r_2 r_3][r_1 r_3 r_3][r_1 r_2 r_1]}$$

qui n'est autre chose que *le théorème bien connu de Carnot*.

Nous interrompons ici les applications de l'identité pour y revenir au paragraphe 30.

IV

24. — Les identités entre *six* vecteurs des paragraphes précédents ne sont pas les seules possibles. Il y en a d'autres; ainsi on démontre sans peine que

$$\begin{aligned} & [a'b'c'] [\lambda_1 b + \mu_1 c \quad \lambda_2 c + \mu_2 a \quad \lambda_3 a + \mu_3 b] \\ & \pm [abc] [\lambda_1' b' + \mu_1' c' \quad \lambda_2' c' + \mu_2' a' \quad \lambda_3' a' + \mu_3' b'] \end{aligned}$$

est identiquement nul, pourvu que l'expression scalaire

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_3$$

ne change pas en valeur absolue, lorsque les a, b, c sont remplacés par les a', b', c' et inversement.

25. — On satisfait déjà à la condition imposée aux λ_i et μ_i en prenant

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c \cdot a' & \lambda_2 &= a \cdot b' & \lambda_3 &= b \cdot c' \\ \mu_1 &= -b \cdot a' & \mu_2 &= -c \cdot b' & \mu_3 &= -a \cdot c' \end{aligned}$$

et c'est ainsi qu'on arrive à l'identité

$$[a'b'c'] [Va', bc \quad Vb', ca \quad Vc', ab] + [abc] [Va, b'c' \quad Vb, c'a' \quad Vc, a'b'] \equiv 0 \quad (X)$$

Applications. — 1. Supposons que les sommets et les côtés de deux triangles sphériques aient les vecteurs

$$\begin{aligned} A_i &\equiv a; b; c & A'_i &\equiv Vb'c'; Vc'a'; Va'b' \\ a_i &\equiv Vbc; Vca; Vab & a'_i &\equiv a'; b'; c' \end{aligned}$$

Dans ce cas, les droites qui relient les sommets correspondants (A_i, A'_i) et les points d'intersection des côtés correspondants (a_i, a'_i) seront

$$(A_1, A'_1) \equiv V\alpha, \beta'c' \quad (a_1, a'_1) \equiv V\alpha', \beta c$$

etc., et l'identité (IX) nous apprend :

Lorsque les droites (A_i, A'_i) sont concourantes, les points d'intersection (a_i, a'_i) sont collinéaires et inversement. C'est là le théorème bien connu de Desargues.

2. Lorsque par contre les sommets et les côtés de deux triangles sphériques A_i et A'_i sont

$$\begin{aligned} A_i &\equiv \alpha; \beta; \gamma & A'_i &\equiv \alpha'; \beta'; \gamma' \\ a_i &\equiv V\beta\gamma; V\gamma\alpha; V\alpha\beta & a'_i &\equiv V\beta'\gamma'; V\gamma'\alpha'; V\alpha'\beta' \end{aligned}$$

la même identité nous fournit un *théorème de Steiner*¹ :

*Lorsque les normales abaissées des A_i sur les a'_i sont concourantes, il en est de même des normales abaissées des A'_i sur les a_i .*²

On le voit sans peine en remarquant que $V\alpha, \beta'c'$, etc., sont dans ce cas les normales abaissées des sommets A_i du premier triangle sur les côtés a'_i du second. Leur produit pseudo-scalaire est nul lorsque ces trois normales sont concourantes.

3. En troisième lieu considérons ensemble les identités :

$$\begin{aligned} [abc][V\alpha, \beta'c' \quad V\beta, \gamma'a' \quad V\gamma, \alpha'b'] + [\alpha'\beta'\gamma'][V\alpha', \beta c \quad V\beta', \gamma a \quad V\gamma', \alpha b] &\equiv 0 \\ [abc][V\alpha, \gamma'b' \quad V\beta, \beta'a' \quad V\gamma, \alpha'c'] + [\alpha'\gamma'\beta'][V\alpha', \gamma b \quad V\beta', \beta a \quad V\gamma', \alpha c] &\equiv 0. \end{aligned}$$

La seconde s'obtient de la première, lorsqu'on y change β' et γ' en γ' et β' . Or, la disparition des premiers termes dans les deux identités entraîne celle des seconds termes, ce qui, en supposant que les α, β, γ sont les sommets d'un premier et α', β', γ' ceux d'un second triangle sphérique signifie :

¹ *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 155-162.

² Voir par. 23, 2.

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de A_1, A_2, A_3 sur les côtés a'_1, a'_2, a'_3 et sur les côtés a'_1, a'_3, a'_2 , il en est de même des normales abaissées de A'_1, A'_2, A'_3 sur les côtés a_1, a_2, a_3 et a_1, a_3, a_2 , en d'autres mots :

Lorsque les deux triangles sphériques A_i et A'_i sont diorthologiques en A_1 , ils le sont encore en A'_1 .

V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\lambda_1\mathbf{b} + \mu_1\mathbf{c} \dots] \pm [\mathbf{abc}][\lambda'_1\mathbf{b}' + \mu'_1\mathbf{c}' \dots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \dots$ par les vecteurs également arbitraires $V\mathbf{bc}, V\mathbf{b}'\mathbf{c}', V\mathbf{ca} \dots$ et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux $\lambda_i, \mu_i \dots$, prendre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} & \lambda_2 &= \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} & \lambda_3 &= \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} \\ \mu_1 &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} & \mu_2 &= \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} & \mu_3 &= \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 V\mathbf{ca} + \mu_1 V\mathbf{ab} = V\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}', \mathbf{bc}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned} & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}']^2 [V\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}', \mathbf{bc} \quad V\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}', \mathbf{ca} \quad V\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}', \mathbf{ab}] \\ & - [\mathbf{abc}]^2 [V\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad V\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad V\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{XI})$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*.
— 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*¹:

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques.

Lorsque les points d'intersection Q_i des droites $(A_i, A'_i) \equiv P_i$ avec les côtés a_i du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction q_i des points $(a_i, a'_i) \equiv P_i$ avec les sommets A'_i du second triangle sont concourantes et inversement.

¹ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.

En effet, si les vecteurs des sommets et côtés des deux triangles sont :

$$\begin{array}{ll} A_i \equiv Vbc ; Vca ; Vab & A'_i \equiv a' ; b' ; c' \\ a_i \equiv a ; b ; c & a'_i \equiv Vb'c' ; Vc'a' ; Va'b' \end{array}$$

nous trouvons pour les vecteurs de la droite p_1 , du point Q_1 , du point P_1 et de la droite q_1

$$\begin{array}{ll} p_1 \equiv Va', bc & P_1 \equiv Va, b'c' \\ Q_1 \equiv Va, a', bc & q_1 \equiv Va', a, b'c' \end{array}$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de notre identité s'annule; le second terme disparaissant alors également, les droites q_i sont concourantes et inversement. q. e. d.

2. On peut tirer de notre identité encore la généralisation pour la sphère d'un *théorème* dû à M. *Constantinescu*¹

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques. Lorsque les normales q_i abaissées des A_i sur les côtés a'_i du second triangle coupent les côtés a_i du premier triangle en trois points collinéaires Q_i , les normales q'_i abaissées des A'_i sur les a_i coupent les côtés a'_i du second triangle également en trois points collinéaires Q'_i .

En effet, lorsque les côtés et les sommets des deux triangles sphériques sont

$$\begin{array}{ll} A_i \equiv Vbc ; Vca ; Vab & A'_i \equiv Vb'c' ; Vc'a' ; Va'b' \\ a_i \equiv a ; b ; c & a'_i \equiv a' ; b' ; c' \end{array}$$

nous aurons successivement pour les normales q_1 et q'_1 et pour leurs intersections Q_1 et Q'_1 avec les côtés a_1 et a'_1

$$\begin{array}{ll} q_1 \equiv Va', bc & q'_1 \equiv Va, b'c' \\ Q_1 \equiv Va, a', bc & Q'_1 \equiv Va', a, b'c' \end{array}$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de l'identité s'annule, ce qui entraîne la disparition du se-

¹ *Mathesis*, 1913, p. 69.

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les Q'_i aussi sont colli-
néaires. q. e. d.

VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par.
24 pour satisfaire à la condition imposée aux $\lambda_i, \mu_i \dots$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= [\mathbf{ca}'\mathbf{r}] & \lambda_2 &= [\mathbf{ab}'\mathbf{r}] & \lambda_3 &= [\mathbf{bc}'\mathbf{r}] \\ \mu_1 &= [\mathbf{a}'\mathbf{br}] & \mu_2 &= [\mathbf{b}'\mathbf{cr}] & \mu_3 &= [\mathbf{c}'\mathbf{ar}] \end{aligned}$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathbf{b} + \mu_1 \mathbf{c} = \mathbf{V}\mathbf{V}\mathbf{bc} \mathbf{V}\mathbf{ra}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs
arbitraires $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \dots$ par $\mathbf{V}\mathbf{bc}, \mathbf{V}\mathbf{b}'\mathbf{c}', \dots$, cette dernière expres-
sion devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à
déterminer

$$\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quel-
conques :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{abc}][\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad \mathbf{V}\mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad \mathbf{V}\mathbf{c}, \mathbf{r}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \\ - & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} \quad \mathbf{V}\mathbf{b}', \mathbf{r}, \mathbf{ca} \quad \mathbf{V}\mathbf{c}', \mathbf{r}, \mathbf{ab}] \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la
sphère *un théorème de Möbius*¹ :

*Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques et l une droite
sphérique quelconque.*

*Lorsque les droites p_i qui relient les points $P_i \equiv (l, a_i)$ aux
sommets A'_i du second triangle sont concourantes, il en est de
même des droites p'_i qui relient les points $P'_i \equiv (l, a'_i)$ aux
sommets A_i du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la droite sphérique l est \mathbf{r} et si les
vecteurs des sommets A_i et A'_i sont $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ et $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ nous
aurons successivement pour les points P_i, P'_i et les droites
 p_i, p'_i :

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{bc} & P'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \\ p_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} & p'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \end{aligned}$$

¹ *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.

L'identité nous montre que les p_i sont concourantes lorsque les p'_i le sont. q. e. d.

2. Nous pouvons cependant tirer de notre identité un théorème tout différent en interprétant le vecteur \mathfrak{r} non pas comme correspondant à une droite sphérique, mais comme appartenant à un point P. Le théorème en question est le suivant :

Par un point quelconque de la surface sphérique P(\mathfrak{r}) on mène des normales p_i et p'_i aux côtés a_i et a'_i de deux triangles sphériques et ensuite par les sommets A'_i et A_i des droites sphériques q_i et q'_i normales aux p_i et p'_i . Lorsque les q_i sont concourantes, il en est de même des q'_i .

En effet on trouve dans ce cas pour les vecteurs des droites p_1 , p'_1 et q_1 , q'_1 immédiatement

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{bc} & p'_1 &\equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \\ q_1 &\equiv V\mathfrak{a}', \mathfrak{r}, \mathfrak{bc} & q'_1 &\equiv V\mathfrak{a}, \mathfrak{r}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \end{aligned}$$

Lorsque les q_i sont concourantes, le produit pseudo-scalaire du premier terme de notre identité s'annule; la disparition du second terme qui en est la conséquence montre que dans ce cas les q'_i aussi sont concourantes et inversement. q. e. d.

3. Dans le cas-limite du plan nous aurons, quel que soit le point P, la droite p_1 normale à a_1 et q_1 de nouveau normale à p_1 , c'est-à-dire q_1 parallèle au côté a_1 du premier triangle. Le théorème qui, pour le plan, est dû à M. J. Neuberg¹, peut être formulé :

Etant donnés deux triangles plans A_i et A'_i et les droites q_i et q'_i menées par les sommets A'_i et A_i parallèles aux côtés a_i et a'_i ; lorsque les droites q_i sont concourantes, il en est de même des droites q'_i ².

29. — Nous arrivons à une autre identité entre sept vecteurs en remplaçant \mathfrak{a} , \mathfrak{a}' , ... par $V\mathfrak{bc}$, $V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, ... , en posant ensuite

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= [\mathfrak{bra}'] & \lambda_2 &= [\mathfrak{ctb}'] & \lambda_3 &= [\mathfrak{arc}'] \\ \mu_1 &= [\mathfrak{cra}'] & \mu_2 &= [\mathfrak{atb}'] & \mu_3 &= [\mathfrak{brc}'] \end{aligned}$$

¹ *Mathesis*, 1882, p. 144, 1883, p. 86, 1914, p. 91.

² Voir par 23, 3.

Dans ce cas nous avons

$$\lambda_1 Vca + \mu_1 Vab = Va, Vra'Vbc$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned} & [a'b'c']^2 [Va, Vra'Vbc \quad Vb, Vrb'Vca \quad Vc, Vrc'Vab] \\ & + [abc]^2 [Va', VraVb'c' \quad Vb', VrbVc'a' \quad Vc', VrcVa'b'] \equiv 0. \end{aligned}$$

Nous n'en donnons qu'une seule application. Soit $P(\mathfrak{r})$ un point quelconque de la surface sphérique; soient

$$\begin{aligned} A_i & \equiv a, b, c & A'_i & \equiv a', b', c' \\ a_i & \equiv Vbc, Vca, Vab & a'_i & \equiv Vb'c', Vc'a', Va'b' \end{aligned}$$

les sommets et côtés de deux triangles sphériques. Les droites sphériques qui relient le point P aux sommets du second (premier) triangle, coupent les côtés du premier (second) triangle en

$$Q_1 \equiv VVra'Vbc \quad Q'_1 \equiv VVraVb'c'$$

etc., et l'identité nous apprend: lorsque les droites (A_i, Q_i) sont concourantes, les droites (A'_i, Q'_i) le sont également.

On arrive à un autre théorème en considérant \mathfrak{r} comme le vecteur d'une droite.

VII

30. — Nous revenons à l'identité vectorielle du paragraphe 22 :

$$[Vaa' Vbb' Vcc'] + [Vbc' Vca' Vab'] + [Vcb' Vac' Vba'] \equiv 0$$

qui peut nous fournir une démonstration très simple du théorème suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 les sommets d'un triangle sphérique, P un point quelconque de la surface sphérique, p_1, p_2, p_3 les normales abaissées de ce point sur les côtés du triangle et coupant ces côtés dans les neuf points

$$P_{11}, P_{12}, P_{13}; \quad P_{21}, P_{22}, P_{23}; \quad P_{31}, P_{32}, P_{33};$$

soient q_1, q_2, q_3 les droites qui relient le même point P aux sommets du triangle et

$$q_{11}, q_{12}, q_{13}; \quad q_{21}, q_{22}, q_{23}; \quad q_{31}, q_{32}, q_{33}$$

les neuf normales qui, des trois sommets, peuvent être abaissées sur les droites q_1, q_2, q_3 .

Il y a en général sur la sphère trois points P tels que sont collinéaires les points de chacun des systèmes :

$$P_{11}, P_{22}, P_{33}; \quad P_{12}, P_{23}; \quad P_{31}; \quad P_{13}, P_{21}, P_{32}$$

et que sont concourantes les droites de chacun des systèmes :

$$q_{11}, q_{22}, q_{33}; \quad q_{12}, q_{23}, q_{31}; \quad q_{13}, q_{21}, q_{32}$$

Dans le plan il n'y a qu'un point qui possède toutes ces propriétés, c'est le point de Tarry du triangle N (fig. 2 et 3).

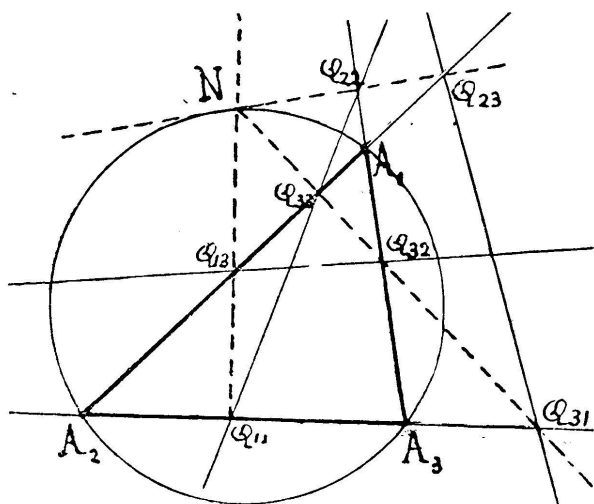


Fig 2.

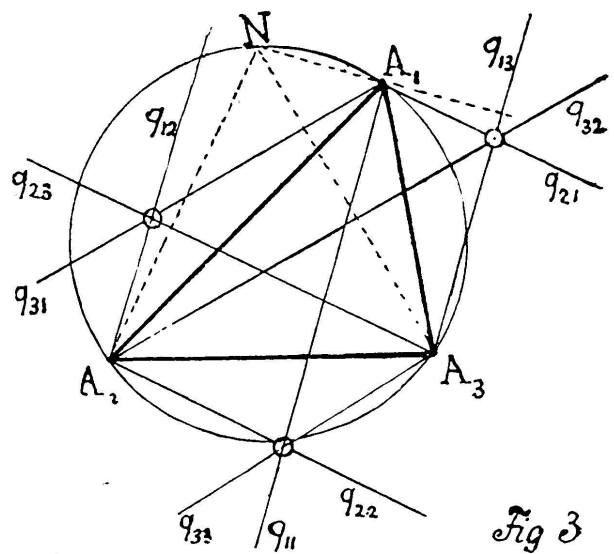


Fig 3

31. — D'ailleurs ce théorème se trouve comme cas spécial d'un théorème plus général encore, qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Soient $A_1A_2A_3$ et $A'_1A'_2A'_3$ les sommets de deux triangles sphériques, P un point quelconque de la surface sphérique, $p_1p_2p_3$ les droites qui relient le point aux sommets du premier et $p'_1p'_2p'_3$ les droites qui le relient aux sommets du second triangle. Les droites p_1, p_2, p_3 rencontrent les côtés du second triangle en neuf points

$$P_{11}, P_{12}, P_{13}; \quad P_{21}, P_{22}, P_{23}; \quad P_{31}, P_{32}, P_{33}$$

De même les droites p'_1, p'_2, p'_3 rencontrent les côtés du premier triangle en neuf points

$$P'_{11}, P'_{12}, P'_{13}; \quad P'_{21}, P'_{22}, P'_{23}; \quad P'_{31}, P'_{32}, P'_{33}.$$

Il y a pour tout couple de triangles sphériques ou plans en général trois points P tels que sont collinéaires les points de chacun des six systèmes :

$$\begin{array}{lll} P_{11}, P_{22}, P_{33}; & P_{12}, P_{23}, P_{31}; & P_{13}, P_{21}, P_{32} \\ P'_{11}, P'_{22}, P'_{33}; & P'_{12}, P'_{23}, P'_{31}; & P'_{13}, P'_{21}, P'_{32}. \end{array}$$

Nous revenons sur la démonstration de ces deux théorèmes dans un article ultérieur.

PENSÉE AXIOMATIQUE¹

PAR

David HILBERT (Göttingue).

Dans la vie des sociétés la prospérité des peuples dépend de celle de tous ses voisins ; les Etats, de même, ont un intérêt vital à ce que l'ordre non seulement règne à l'intérieur de chacun d'eux, mais existe aussi dans leurs relations mutuelles. Il n'en va pas autrement dans la vie des sciences. Preuve en soit le vif intérêt que les représentants les plus remarquables de la pensée mathématique ont toujours témoigné à la structure et aux lois des autres sciences que la leur ; ils n'ont cessé avant tout d'étudier les mathématiques (et pour le plus grand bien de ces dernières) dans leurs rapports avec les vastes

¹ *Axiomatisches Denken*, conférence faite à la reunion annuelle de la Société mathématique suisse, tenue à Zurich, le 11 septembre 1917. — Traduction de M. Arnold REYMOND, professeur à l'Université de Neuchâtel.