

I

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

est le produit vectoriel ou externe $V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$, vecteur dont la grandeur est $\sin \alpha$, lorsque α est la distance sphérique minima des points en question.

d) que le vecteur du point d'intersection des droites \mathfrak{l} et \mathfrak{l}_1 est de même $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}$, la grandeur de ce vecteur étant $\sin \alpha$ lorsque α est l'angle des deux droites.

e) que le vecteur $\alpha\mathbf{r} - \alpha_1\mathbf{r}_1$ appartient à un point P situé sur la droite déterminée par \mathbf{r} et \mathbf{r}_1 et tel que $\sin(\text{PR}) : \sin(\text{PR}_1) \equiv (\text{RR}_1\text{P}) = \alpha_1 : \alpha$.

f) que le vecteur $\beta\mathfrak{l} - \beta_1\mathfrak{l}_1$ appartient à une droite p passant par l'intersection des droites $l(\mathfrak{l})$ et $l_1(\mathfrak{l}_1)$ et telle que $\sin(pl) : \sin(pl_1) \equiv (ll_1p) = \beta_1 : \beta$.

g) que trois points sont collinéaires et que trois droites sont concourantes lorsque les trois vecteurs correspondants multipliés par certains facteurs donnent une somme nulle.

h) qu'une droite de vecteur \mathfrak{l} ne passe par un point de vecteur \mathbf{r} que lorsque le produit scalaire ou interne de leurs vecteurs est nul.

i) que la droite dont le vecteur est $V\mathbf{r}\mathfrak{l}$ passe par le point \mathbf{r} tout en étant normale à la droite dont le vecteur est \mathfrak{l} .

I

2. — Considérons maintenant les identités vectorielles :

$$\begin{aligned} (\beta_2\mathfrak{l}_2 - \beta_3\mathfrak{l}_3) + (\beta_3\mathfrak{l}_3 - \beta_1\mathfrak{l}_1) + (\beta_1\mathfrak{l}_1 - \beta_2\mathfrak{l}_2) &\equiv 0. \\ (\alpha_2\mathbf{r}_2 - \alpha_3\mathbf{r}_3) + (\alpha_3\mathbf{r}_3 - \alpha_1\mathbf{r}_1) + (\alpha_1\mathbf{r}_1 - \alpha_2\mathbf{r}_2) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Si les vecteurs des côtés et ceux des sommets opposés d'un triangle sphérique sont \mathfrak{l}_i et \mathbf{r}_i , la première nous apprend que trois transversales angulaires, pour lesquelles le produit des rapports est *un* sont concourantes (1, g). Il ressort de la seconde que trois points appartenant aux trois côtés, pour lesquels le produit des rapports est *un*, sont collinéaires.

D'après (1, d) le point d'intersection dans le premier cas est déterminé par le produit vectoriel

$$V(\beta_2\mathfrak{l}_2 - \beta_3\mathfrak{l}_3)(\beta_3\mathfrak{l}_3 - \beta_1\mathfrak{l}_1) \quad \text{ou} \quad \frac{\sin A_1}{\beta_1}\mathbf{r}_1 + \frac{\sin A_2}{\beta_2}\mathbf{r}_2 + \frac{\sin A_3}{\beta_3}\mathbf{r}_3$$

lorsque les angles extérieurs du triangle sphérique sont A_i . Les coordonnées barycentriques du point d'intersection sont par conséquent $\sin A_i / \beta_i$.

De même on trouve dans le second cas pour la droite des trois points le vecteur

$$V(\alpha_2 \mathbf{r}_2 - \alpha_3 \mathbf{r}_3)(\alpha_3 \mathbf{r}_3 - \alpha_1 \mathbf{r}_1) \quad \text{ou} \quad \frac{\sin a_1}{\alpha_1} \mathbf{f}_1 + \frac{\sin a_2}{\alpha_2} \mathbf{f}_2 + \frac{\sin a_3}{\alpha_3} \mathbf{f}_3$$

lorsque les a_i sont les côtés du triangle sphérique. Les coordonnées barycentriques de cette droite sont $1/\alpha_i$. Dans le cas-limite du triangle plan, les $\sin A_i$ et $\sin a_i$ peuvent être remplacés par les côtés a_i eux-mêmes.

3. — a) La première médiane, dont le vecteur a la forme $\beta_2 \mathbf{f}_2 - \beta_3 \mathbf{f}_3$ passe par le milieu du côté opposé $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$. Le produit interne de ces deux vecteurs étant par conséquent $(1, h)$ nul, il s'ensuit :

$$\beta_2 \sin h_2 - \beta_3 \sin h_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \beta_2 \sin A_3 - \beta_3 \sin A_2 = 0$$

lorsque les h_i sont les hauteurs du triangle sphérique. Les trois médianes

$$\sin A_2 \mathbf{f}_2 - \sin A_3 \mathbf{f}_3, \quad \sin A_3 \mathbf{f}_3 - \sin A_1 \mathbf{f}_1, \quad \sin A_1 \mathbf{f}_1 - \sin A_2 \mathbf{f}_2$$

sont donc concourantes ; de même les trois symédianes

$$\frac{\mathbf{f}_2}{\sin A_2} - \frac{\mathbf{f}_3}{\sin A_3}, \quad \frac{\mathbf{f}_3}{\sin A_3} - \frac{\mathbf{f}_1}{\sin A_1}, \quad \frac{\mathbf{f}_1}{\sin A_1} - \frac{\mathbf{f}_2}{\sin A_2}.$$

Les premières passent d'après le paragraphe précédent par le point, dont les coordonnées barycentriques sont $(1, 1, 1)$; les secondes passent par le point de Lemoine ou Græbe $(\sin^2 a_1, \sin^2 a_2, \sin^2 a_3)$ qui, dans le cas-limite du triangle plan, devient (a_1^2, a_2^2, a_3^2) .

b) La droite dont le vecteur $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$ appartient au premier côté du triangle est par là même normale à ce côté ; elle passe par le milieu de ce côté $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, vu que le produit scalaire des deux vecteurs en question est nul $(1, h)$. Le point d'intersection des normales concourantes

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

est déterminé (1, *d*) par le produit externe de deux de ces vecteurs

$$V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 .$$

C'est le centre du cercle circonscrit.

4. — Posons maintenant dans notre identité du paragraphe 2

$$\alpha_1 \equiv \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = \cos a_1 \quad \alpha_2 \equiv \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1 = \cos a_2 \quad \alpha_3 \equiv \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \cos a_3 .$$

Elle prendra alors la forme¹

$$V\mathbf{r}_1 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_2 V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_3 V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \equiv 0 \quad (\text{II})$$

ou encore

$$V\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \equiv 0$$

lorsque pour éviter une accumulation de V, on n'écrit que le dernier en remplaçant les autres par des virgules. Or, $V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ est le premier côté et $V\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ d'après (1, *i*) la normale abaissée sur cette droite du sommet opposé \mathbf{r}_1 ; l'identité nous apprend donc que dans un triangle sphérique les trois hauteurs sont concourantes. L'orthocentre x_i étant sur la première hauteur, nous avons, en écrivant par abréviation s_i et S_i , c_i et C_i pour $\sin a_i$, $\sin A_i$, $\cos a_i$ et $\cos A_i$ d'après (1, *h*)

$$\begin{aligned} (x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3) \cdot V\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 &\equiv x_3 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 - x_2 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \\ &= x_3 s_1 s_2 C_3 - x_2 s_1 s_3 C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \text{tang } A_1 : \text{tang } A_2 : \text{tang } A_3 .$$

5. — En multipliant l'identité du paragraphe précédent scalairement par le vecteur \mathbf{r}_4 , nous obtenons la nouvelle identité :

$$V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_4 \cdot V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_4 \cdot V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 + V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4 \cdot V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \equiv 0 . \quad (\text{III})$$

Elle nous apprend d'abord : si dans un quadrangle complet ($\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4$) sphérique ou plan non seulement les côtés ($\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$) et ($\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4$) sont *perpendiculaires ou conjugués par rapport à une conique sphérique ou plane*, mais encore les côtés ($\mathbf{r}_2\mathbf{r}_4$)

¹ On a en effet $\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \equiv V\mathbf{r}_1 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$.

et $(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1)$, il en sera de même des côtés $(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)$ et $(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)$, vu que la disparition des deux premiers produits scalaires entraîne celle du dernier.

On peut évidemment écrire notre identité :

$$V\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_4 \cdot V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3 + V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_4 \cdot V\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_1 + V\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_4 \cdot V\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \equiv 0$$

et considérer les vecteurs comme appartenant aux quatre côtés d'un quadrilatère sphérique complet. Dans ce cas les six produits vectoriels déterminent les sommets $(1, d)$, et l'identité nous apprend : si les distances des sommets $V\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_4$ et $V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3$ et des sommets $V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_4$ et $V\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_1$ sont des quadrants, ou bien si ces sommets sont conjugués deux à deux par rapport à une conique il en est de même pour les sommets $V\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_4$ et $V\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2$.

6. — Reprenons encore l'identité I et posons-y :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= V\mathbf{r}_2 \mathbf{f} \cdot V\mathbf{r}_3 \mathbf{f} \equiv \mathbf{r}_2 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_3 \equiv \mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_2 \\ \alpha_2 &= V\mathbf{r}_3 \mathbf{f} \cdot V\mathbf{r}_1 \mathbf{f} \equiv \mathbf{r}_3 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}_1 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_3 \\ \alpha_3 &= V\mathbf{r}_1 \mathbf{f} \cdot V\mathbf{r}_2 \mathbf{f} \equiv \mathbf{r}_1 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}_2 \cdot V\mathbf{f}, \mathbf{r}_1 \end{aligned}$$

Nous rappelant que

$$\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{x} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} \mathbf{r}_3$$

est le produit externe des vecteurs

$$\mathbf{x} \quad \text{et} \quad V\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$$

nous voyons sans peine qu'un des trois termes de notre identité avec un changement de signe devient le produit externe des vecteurs :

$$V\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \quad \text{et} \quad V\mathbf{f}, \mathbf{r}_1$$

ou encore¹ de

$$\mathbf{f}_1 \quad \text{et} \quad V\mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3 .$$

L'identité toute entière prend par conséquent la forme :

$$V\mathbf{f}_1, \mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3 + V\mathbf{f}_2, \mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}_3 \mathbf{f}_1 + V\mathbf{f}_3, \mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \equiv 0 \quad \text{(IV)}$$

¹ Se rappeler que $V\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 = \sin a_1 \mathbf{f}_1$ et $V\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3 = \sin A_1 \mathbf{r}_1$. On multiplie donc en réalité par le module du triangle sphérique des \mathbf{r}_i , c'est-à-dire par $\sin A_i : \sin a_i$.

L'interprétation géométrique de cette identité est bien simple. En effet, si les \mathfrak{f}_i sont les côtés d'un trilatère sphérique et si \mathfrak{f} est le vecteur d'une droite quelconque l , on a successivement pour le premier sommet A_1 , pour la normale p_1 abaissée sur la droite l , pour son intersection P_1 avec l , et pour la normale q_1 du point P_1 sur le premier côté du triangle, en appliquant alternativement $(1, d)$ et $(1, i)$

$$A_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3, \quad p_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3, \quad P_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3, \quad q_1 \equiv \mathfrak{V}\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3.$$

Nous obtenons deux droites analogues q_2, q_3 en partant des deux autres sommets du trilatère. L'identité nous apprend que les trois droites sphériques q_i sont concourantes. Leur point commun est *l'orthopôle de la droite sphérique*¹. D'après l'extension connue donnée au produit externe de deux vecteurs, l'identité IV peut encore s'interpréter de la manière suivante :

Si l'on mène par les sommets A_i des droites p_i , conjuguées à une droite quelconque l par rapport à une conique donnée, les points d'intersection étant P_i , les droites q_i , qui passant par les P_i sont conjuguées aux côtés a_i du triangle sphérique passent par un point.

7. — On trouve les coordonnées barycentriques x_i de l'orthopôle correspondant à la droite sphérique u_i en formant $(1, d)$ le produit externe de

$$q_1 \equiv \alpha_2 \mathfrak{r}_2 - \alpha_3 \mathfrak{r}_3 \quad \text{et} \quad q_2 \equiv \alpha_3 \mathfrak{r}_3 - \alpha_1 \mathfrak{r}_1$$

c'est-à-dire qu'on a d'une manière générale

$$x_1 \mathfrak{r}_1 + x_2 \mathfrak{r}_2 + x_3 \mathfrak{r}_3 = \alpha_2 \alpha_3 \mathfrak{V}\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 + \alpha_3 \alpha_1 \mathfrak{V}\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 + \alpha_1 \alpha_2 \mathfrak{V}\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$$

ce qui, multiplié successivement par

$$\mathfrak{V}\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3, \quad \mathfrak{V}\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{V}\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$$

¹ M. J. NEUBERG a énoncé ce théorème en 1875 dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (démonstration par H. van AUBEL, *N. C. M.*, t. II, p. 316, et par E. LEMOINE, *J. M. E.*, 1884, p. 50). Il a étudié la correspondance entre l'orthopolaire et l'orthopôle dans la *N. C. M.*, 1878, p. 379. (Voir *Mathesis*, t. IV, avril 1914, p. 92.)

donne pour les coordonnées de l'orthopôle

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 \\ &= \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{11} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{12} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{13} \\ &: \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{12} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{22} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{23} \\ &: \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{13} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{23} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{33} \end{aligned}$$

si l'on pose par abréviation pour les coefficients des produits $\alpha_r \alpha_s$

$$\Omega_{ik} \equiv \sin a_i \sin a_k \cos A_{ik} \equiv \Omega_{ki}.$$

Il suffira maintenant de se rappeler que Δ étant $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3]$, nous avons :

$$\alpha_1 \equiv \text{Vr}_2 \mathbf{f}_1 \cdot \text{Vr}_3 \equiv \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = \Delta^2 u_2 u_3 - \cos a_1 \Omega(uu).$$

La première coordonnée x_1 de l'orthopôle devient alors la somme de

$$\begin{aligned} \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{11} &= [\Delta^4 u_1^2 u_2 u_3 - \Delta^2 (c_2 u_1 u_2 + c_3 u_1 u_3) \Omega(uu) + c_2 c_3 \Omega^2(uu)] s_1 s_1 \\ \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{12} &= [\Delta^4 u_2^2 u_3 u_1 - \Delta^2 (c_3 u_2 u_3 + c_1 u_2 u_1) \Omega(uu) + c_3 c_1 \Omega^2(uu)] s_1 s_2 C_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{13} &= [\Delta^4 u_3^2 u_1 u_2 - \Delta^2 (c_1 u_3 u_1 + c_2 u_3 u_2) \Omega(uu) + c_1 c_2 \Omega^2(uu)] s_1 s_3 C_2 \end{aligned}$$

8. — Lorsqu'on passe au cas-limite du plan, les termes qui contiennent la quatrième puissance de

$$\Delta \equiv \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik}$$

deviennent infiniment petits par rapport aux autres. Il ne reste, lorsqu'on pose

$$\lim \Delta \equiv \lim \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik} = \sin A_i \sin A_k \cdot a_{ik} \equiv \bar{\Delta} \quad \text{et} \quad \lim \cos a_i = 1$$

qu'une première partie qui devient à la limite

$$-\bar{\Delta}^2 a_1 [(a_2 C_3 + a_3 C_2) u_2 u_3 + (a_1 + a_3 C_2) u_3 u_1 + (a_1 + a_2 C_3) u_1 u_2]$$

ou

$$\bar{\Delta}^2 a_1 [a_1 u_2 u_3 + a_2 \cos A_3 \cdot u_3 u_1 + a_3 \cos A_2 \cdot u_1 u_2]$$

et d'une seconde partie du même ordre

$$\begin{aligned} \Omega(uu) [c_2 c_3 (1 - c_1^2) + c_1 c_2 (c_1 c_3 - c_2) + c_1 c_3 (c_1 c_2 - c_3)] \equiv \\ \Omega(uu) (c_1 c_2 - c_3) (c_1 c_3 - c_2) \equiv \Omega(uu) \sin^2 a_1 \sin a_2 \sin a_3 \cos A_2 \cos A_3 \end{aligned}$$

qui devient à la limite $a_1^2 a_2 a_3 \cos A_2 \cos A_3 \cdot \Omega(uu)$. Si enfin nous introduisons au lieu des coordonnées u_i de la droite ses distances p_i aux sommets du triangle en posant¹ $\bar{\Delta}u_i = \sqrt{\Omega(uu)} \cdot p_i$ nous obtenons comme première coordonnée barycentrique de l'orthopôle

$$a_1 [a_1 a_2 a_3 C_2 C_3 + a_1 p_2 p_3 + a_3 C_2 p_1 p_2 + a_2 C_3 p_1 p_3] .$$

Les deux autres s'en déduisent par permutation cyclique des indices.

9. — Lorsqu'il s'agit inversement de trouver la droite sphérique $\mathfrak{f}(u_i)$, son orthopôle \mathfrak{r}_0 étant donné, il suffira d'exprimer que \mathfrak{r}_0 est situé sur les droites q_i , ce qui fournit les équations

$$\mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{r}_1 \equiv [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_1] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r}_1 + [\mathfrak{f}_1 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}, \mathfrak{r}_2 \equiv [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_2] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r}_2 + [\mathfrak{f}_2 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_2] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{f}_3, \mathfrak{f}, \mathfrak{r}_3 \equiv [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_3] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r}_3 + [\mathfrak{f}_3 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_3] \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 0$$

du second degré par rapport aux u_i . Lorsqu'une droite u_i satisfait à deux de ces équations, elle suffira à cause de l'identité (IV) également à la troisième. Il y a donc sur la sphère quatre *orthopolaires* correspondant au point \mathfrak{r}_0 comme orthopôle; ce sont les tangentes communes aux courbes de seconde classe.

Il est facile de trouver les six foyers des trois coniques sphériques². En effet, $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} \equiv \Omega(uu) = 0$ étant l'équation de la courbe absolue, le premier terme dans chacune de ces équations égalé à zéro, donne l'équation de deux foyers, de sorte que les six foyers en question sont :

$$\mathfrak{r}_1, \vee \mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_1; \quad \mathfrak{r}_2, \vee \mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_2; \quad \mathfrak{r}_3, \vee \mathfrak{r}_0 \mathfrak{f}_3 .$$

Trois de ces foyers coïncident avec les sommets; les trois autres sont situés sur les côtés du triangle à des distances $\pi/2$ du point \mathfrak{r}_0 . Lorsqu'on passe au plan, les trois derniers

¹ Soit : $\sin A_1 \cdot u_1 \mathfrak{f}_1 + \sin A_2 \cdot u_2 \mathfrak{f}_2 + \sin A_3 \cdot u_3 \mathfrak{f}_3 = u_4 \mathfrak{f} = \sqrt{\Omega(uu)} \cdot \mathfrak{f}$. En multipliant par \mathfrak{r}_1 nous aurons $\sin A_1 \sin h_1 u_1 = u_4 \sin p_1$ ou $\bar{\Delta} \cdot u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} \sin p_1$ et $\bar{\Delta} \cdot u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} \cdot p_1$.

² « Essai de géométrie sphérique », p. 250-251.

foyers s'éloignent à l'infini; dans le plan les coniques sont par conséquent des paraboles ayant leurs foyers aux sommets du triangle et leurs axes parallèles aux côtés opposés.

10. — Si dans l'identité IV on prend, au lieu des quatre droites, quatre points, c'est-à-dire au lieu du trilatère \mathfrak{f}_i et de la droite \mathfrak{f} , le triangle \mathfrak{r}_i et le point \mathfrak{r} , on obtient

$$V_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3} + V_{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1} + V_{\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2} \equiv 0 ,$$

identité qui exprime simplement le théorème réciproque; nous n'en parlons pas.

11. — Nous arrivons à un autre théorème qu'on pourrait appeler le théorème *semi-réciproque*, en gardant dans notre identité les côtés du trilatère \mathfrak{f}_i , mais en remplaçant la droite quelconque \mathfrak{f} par un point quelconque \mathfrak{r} . Dans sa nouvelle forme :

$$V_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} + V_{\mathfrak{f}_2, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_1} + V_{\mathfrak{f}_3, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2} \equiv 0 , \quad (V)$$

l'identité nous apprend : *Lorsque par un point quelconque P(\mathfrak{r}) d'un triangle sphérique ou plan A_i on fait passer des droites q_i normales ou conjuguées aux droites $p_i \equiv A_i P$, leurs points d'intersection Q_i avec les côtés correspondants sont collinéaires¹.*

En effet, on a successivement pour le sommet A_1 , pour la droite p_1 , pour la normale q_1 et pour son point d'intersection Q_1 avec le premier côté du triangle

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv V_{\mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} , & p_1 &\equiv V_{\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} \\ q_1 &\equiv V_{\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} , & Q_1 &\equiv V_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3} , \end{aligned}$$

L'identité V nous montre que le point Q_1 et les deux autres Q_2 et Q_3 qu'on obtient en partant des sommets A_2 et A_3 sont bien collinéaires. q. e. d.

¹ Voir encore ma « Note sur la géométrie du triangle et du tétraèdre » dans l'*Ens. Math.*, 1917, pp. 273-275, à propos de laquelle M. A. KIEFER m'a fait remarquer que pour le cas spécial où P est le centre du cercle inscrit, le théorème se trouve chez Steiner parmi les « Vermischte Sätze und Aufgaben » (*Ges. Werke*, Bd. 2, S. 673) et chez A. KIEFER, « Ueber eine Dreiecksaufgabe und bezügliche Sätze » (*Archiv der Mathematik und Physik*, III, Reihe XII, Heft 1, S. 30).

12. — Si les coordonnées x_i du point \mathbf{r} sont données, il est facile d'exprimer les coordonnées u_i de la droite correspondante en fonction des x_i . Nous devons en effet chercher la droite sphérique qui relie les points

$$Q_1 \equiv \alpha_2 \mathbf{r}_2 - \alpha_3 \mathbf{r}_3 ; \quad Q_2 \equiv \alpha_3 \mathbf{r}_3 - \alpha_1 \mathbf{r}_1$$

lorsque les coefficients α_i sont déterminés par les équations :

$$\alpha_1 = \mathbf{Vr}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_3 ; \quad \alpha_2 = \mathbf{Vr}_3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_1 ; \quad \alpha_3 = \mathbf{Vr}_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_2 .$$

Nous trouvons son vecteur en formant le produit vectoriel ou externe. Ceci nous permet de conclure (2), que les coordonnées u_i de la droite cherchée satisfont à

$$u_1 : u_2 : u_3 = \alpha_2 \alpha_3 : \alpha_3 \alpha_1 : \alpha_1 \alpha_2 .$$

Quant aux coefficients α_i , on voit donc sans peine que

$$\alpha_1 \equiv \mathbf{Vr}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_3 \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3 - \cos a_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \omega(x_2) \omega(x_3) - \cos a_1 \omega(xx)$$

pourvu que $\omega(x_2)$ et $\omega(x_3)$ soient les demi-dérivées partielles par rapport à x_2 et x_3 de la forme quadratique

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \equiv \omega(xx) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cos a_1 x_2 x_3 + 2\cos a_2 x_3 x_1 + 2\cos a_3 x_1 x_2 \\ &\equiv (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - \dots = l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - \dots \end{aligned}$$

13. — Dans le cas-limite du plan la valeur trouvée pour α_1

$$\begin{aligned} &\left(l_\infty - 2x_1 \sin^2 \frac{a_3}{2} - 2x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} \right) \left(l_\infty - 2x_2 \sin^2 \frac{a_1}{2} - 2x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} \right) \\ &- \left(1 - 2\sin^2 \frac{a_1}{2} \right) \left(l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} - 4x_3 x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} - \dots \right) \end{aligned}$$

devient

$$x_1^2 (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + x_1 x_2 (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) + x_1 x_3 (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) + 2x_2 x_3 a_1^2$$

etc. Nous pouvons cependant donner aux α_i , donc aux u_i de la droite, une forme plus simple. Nous avons en effet :

$$\alpha_1 \equiv \mathbf{Vr}_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{Vr} \mathbf{r}_3 = -\sin PA_2 \sin PA_3 \cdot \cos \Phi_1$$

si nous appelons Φ_1 l'angle formé par les droites PA_2 et PA_3 .

De cette manière nous trouvons pour le cas de la sphère

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\sin PA_1}{\cos \Phi_1} : \frac{\sin PA_2}{\cos \Phi_2} : \frac{\sin PA_3}{\cos \Phi_3}$$

et dans le cas d'un triangle plan.

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{PA_1}{\cos \Phi_1} : \frac{PA_2}{\cos \Phi_2} : \frac{PA_3}{\cos \Phi_3}$$

14. — Reprenons l'identité (V) et multiplions-la scalairement par le vecteur quelconque \mathfrak{f}_4 . Dans sa nouvelle forme¹

$$V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4 + V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_1 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_4 + V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_4 \equiv 0 \quad (\text{VI})$$

l'identité nous fournit une démonstration très simple du *théorème*, généralisé pour la sphère, de *Bodenmiller*²:

Le lieu géométrique du point P tel que les droites sphériques qui le relient à deux points donnés de la surface sphérique sont normales ou conjuguées est une conique; les trois coniques qui correspondent aux trois couples de sommets d'un quadrilatère appartiennent à un même faisceau.

En effet, lorsque les côtés du quadrilatère sont \mathfrak{f}_i ($i = 1, 2, 3, 4$), nous aurons en $V\mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3$ et $V\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4$ deux sommets opposés. Les droites qui le relient au point \mathfrak{r} sont $V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3$ et $V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4$, et ces droites sont normales (ou conjuguées) lorsque \mathfrak{r} satisfait à l'équation de la conique

$$V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_4 = 0.$$

Nous obtenons d'autres coniques en partant des deux autres couples de sommets opposés; l'identité nous montre que les points communs aux deux premières satisfont également à la troisième, ou bien que les trois coniques appartiennent à un même faisceau.

¹ Il est en effet

$$\mathfrak{f}_4 \cdot V\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{f}_4 \mathfrak{f}_1 \equiv -V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \cdot V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_4 \mathfrak{f}_1.$$

² C. GUDERMANN. *Grundriss der analytischen Sphärik*, 1830, S. 138.