

# V

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de  $A_1, A_2, A_3$  sur les côtés  $a'_1, a'_2, a'_3$  et sur les côtés  $a'_1, a'_3, a'_2$ , il en est de même des normales abaissées de  $A'_1, A'_2, A'_3$  sur les côtés  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_1, a_3, a_2$ , en d'autres mots :

*Lorsque les deux triangles sphériques  $A_i$  et  $A'_i$  sont diorthologiques en  $A_1$ , ils le sont encore en  $A'_1$ .*

## V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\lambda_1\mathbf{b} + \mu_1\mathbf{c} \dots] \pm [\mathbf{abc}][\lambda'_1\mathbf{b}' + \mu'_1\mathbf{c}' \dots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \dots$  par les vecteurs également arbitraires  $V\mathbf{bc}, V\mathbf{b}'\mathbf{c}', V\mathbf{ca} \dots$  et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux  $\lambda_i, \mu_i \dots$ , prendre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} & \lambda_2 &= \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} & \lambda_3 &= \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} \\ \mu_1 &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} & \mu_2 &= \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} & \mu_3 &= \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 V\mathbf{ca} + \mu_1 V\mathbf{ab} = V\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}', \mathbf{bc}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned} & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}']^2 [V\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}', \mathbf{bc} \quad V\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}', \mathbf{ca} \quad V\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}', \mathbf{ab}] \\ & - [\mathbf{abc}]^2 [V\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad V\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad V\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{XI})$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*.  
— 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*<sup>1</sup>:

Soient  $A_i$  et  $A'_i$  deux triangles sphériques.

*Lorsque les points d'intersection  $Q_i$  des droites  $(A_i, A'_i) \equiv P_i$  avec les côtés  $a_i$  du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction  $q_i$  des points  $(a_i, a'_i) \equiv P_i$  avec les sommets  $A'_i$  du second triangle sont concourantes et inversement.*

<sup>1</sup> *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.

En effet, si les vecteurs des sommets et côtés des deux triangles sont :

$$\begin{array}{ll} A_i \equiv Vbc ; Vca ; Vab & A'_i \equiv a' ; b' ; c' \\ a_i \equiv a ; b ; c & a'_i \equiv Vb'c' ; Vc'a' ; Va'b' \end{array}$$

nous trouvons pour les vecteurs de la droite  $p_1$ , du point  $Q_1$ , du point  $P_1$  et de la droite  $q_1$

$$\begin{array}{ll} p_1 \equiv Va', bc & P_1 \equiv Va, b'c' \\ Q_1 \equiv Va, a', bc & q_1 \equiv Va', a, b'c' \end{array}$$

Lorsque les points  $Q_i$  sont collinéaires, le premier terme de notre identité s'annule; le second terme disparaissant alors également, les droites  $q_i$  sont concourantes et inversement. q. e. d.

2. On peut tirer de notre identité encore la généralisation pour la sphère d'un *théorème* dû à M. *Constantinescu*<sup>1</sup>

Soient  $A_i$  et  $A'_i$  deux triangles sphériques. Lorsque les normales  $q_i$  abaissées des  $A_i$  sur les côtés  $a'_i$  du second triangle coupent les côtés  $a_i$  du premier triangle en trois points collinéaires  $Q_i$ , les normales  $q'_i$  abaissées des  $A'_i$  sur les  $a_i$  coupent les côtés  $a'_i$  du second triangle également en trois points collinéaires  $Q'_i$ .

En effet, lorsque les côtés et les sommets des deux triangles sphériques sont

$$\begin{array}{ll} A_i \equiv Vbc ; Vca ; Vab & A'_i \equiv Vb'c' ; Vc'a' ; Va'b' \\ a_i \equiv a ; b ; c & a'_i \equiv a' ; b' ; c' \end{array}$$

nous aurons successivement pour les normales  $q_1$  et  $q'_1$  et pour leurs intersections  $Q_1$  et  $Q'_1$  avec les côtés  $a_1$  et  $a'_1$

$$\begin{array}{ll} q_1 \equiv Va', bc & q'_1 \equiv Va, b'c' \\ Q_1 \equiv Va, a', bc & Q'_1 \equiv Va', a, b'c' \end{array}$$

Lorsque les points  $Q_i$  sont collinéaires, le premier terme de l'identité s'annule, ce qui entraîne la disparition du se-

<sup>1</sup> *Mathesis*, 1913, p. 69.

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les  $Q'_i$  aussi sont colli-  
néaires. q. e. d.

## VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par.  
24 pour satisfaire à la condition imposée aux  $\lambda_i, \mu_i \dots$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= [\mathbf{ca}'\mathbf{r}] & \lambda_2 &= [\mathbf{ab}'\mathbf{r}] & \lambda_3 &= [\mathbf{bc}'\mathbf{r}] \\ \mu_1 &= [\mathbf{a}'\mathbf{br}] & \mu_2 &= [\mathbf{b}'\mathbf{cr}] & \mu_3 &= [\mathbf{c}'\mathbf{ar}] \end{aligned}$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathbf{b} + \mu_1 \mathbf{c} = \mathbf{V}\mathbf{V}\mathbf{bc} \mathbf{V}\mathbf{ra}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs  
arbitraires  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \dots$  par  $\mathbf{V}\mathbf{bc}, \mathbf{V}\mathbf{b}'\mathbf{c}', \dots$ , cette dernière expres-  
sion devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à  
déterminer

$$\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quel-  
conques :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{abc}][\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad \mathbf{V}\mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad \mathbf{V}\mathbf{c}, \mathbf{r}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \\ - & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'][\mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} \quad \mathbf{V}\mathbf{b}', \mathbf{r}, \mathbf{ca} \quad \mathbf{V}\mathbf{c}', \mathbf{r}, \mathbf{ab}] \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la  
sphère *un théorème de Möbius*<sup>1</sup> :

*Soient  $A_i$  et  $A'_i$  deux triangles sphériques et  $l$  une droite  
sphérique quelconque.*

*Lorsque les droites  $p_i$  qui relient les points  $P_i \equiv (l, a_i)$  aux  
sommets  $A'_i$  du second triangle sont concourantes, il en est de  
même des droites  $p'_i$  qui relient les points  $P'_i \equiv (l, a'_i)$  aux  
sommets  $A_i$  du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la droite sphérique  $l$  est  $\mathbf{r}$  et si les  
vecteurs des sommets  $A_i$  et  $A'_i$  sont  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  et  $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$  nous  
aurons successivement pour les points  $P_i, P'_i$  et les droites  
 $p_i, p'_i$  :

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{bc} & P'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \\ p_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{r}, \mathbf{bc} & p'_1 &\equiv \mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \end{aligned}$$

<sup>1</sup> *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.