Généralisation par voie complexe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

de H. Poincaré : *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*[1].

Généralisation par voie complexe.

105. — Dans les derniers paragraphes ci-dessus, j'ai rappelé quelques rares essais d'extension de l'arithmogéométrie, qui se rattachent tous à l'étude bien difficile des arithmopoints de courbes ou de surfaces transcendantes spéciales, ou encore à celle de ceux des points des courbes ou surfaces algébriques dont les coordonnées sont exprimables non plus rationnellement mais au moyen de nombres appartenant à un certain domaine imposé de rationalité.

Ce sont là deux directions bien distinctes vers lesquelles l'arithmogéométrie semble devoir s'orienter. Le grand intérêt qui est actuellement attaché au célèbre théorème de Fermat ne peut que provoquer des recherches arithmogéométriques autour des courbes spéciales d'ordre élevé, ou même d'ordre indéterminé, plus ou moins analogues aux laméennes. Les belles recherches de M. C. Störmer sont d'autre part de nature à faire naître le désir d'entreprendre des études semblables pour d'autres types d'équations transcendantes.

Ce sont là, je le répète, des questions qui seront certainement étudiées dans un avenir plus ou moins éloigné de nous.

A côté de ces deux extensions naturelles de l'arithmogéométrie, je crois devoir signaler enfin une troisième généralisation essentiellement différente des précédentes, car elle consiste en une prolongation de l'arithmogéométrie dans le domaine des grandeurs et des nombres imaginaires. De même, en effet, que la considération de ceux des éléments de certaines figures géométriques, qui sont repérés par des nombres rationnels, a pu présenter un certain intérêt, de même l'*étude des éléments réels des figures complexes* peut parfois conduire à des résultats qui, s'ils ne semblent

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), 5e série, t. 7, 1901, p. 161-233.

offrir aucune utilité immédiate, sont néanmoins suffisamment curieux pour mériter de ce fait d'être mentionnés ici.

Le sujet de cette étude des éléments réels de figures imaginaires est évidemment immense, en raison même du nombre illimité des figures imaginaires de la géométrie plane et de la géométrie spatiale. Il y a donc lieu de limiter les développements qui vont suivre à ceux des résultats qui paraissent tout spécialement les plus curieux.

106. — Dans tout ce qui va suivre, les figures complexes considérées seront définies par des points dont les coordonnées seront des nombres imaginaires de la forme $x + iy$. Un point imaginaire du plan dépend ainsi de quatre nombres réels ; un point de l'espace dépend de six nombres réels.

Le principe, qui est à la base des remarques suivantes, est que, sur toute droite imaginaire du plan représentée par une équation

$$(a + ia')\mathrm{X} + (b + ib')\mathrm{Y} + (c + ic') = 0 ,$$

il existe un point réel. Corrélativement, parmi toutes les droites pivotant autour d'un même point imaginaire, il existe une droite réelle, en géométrie plane bien entendu.

Lorsque la droite imaginaire varie dans le plan [en entendant par variation de la droite imaginaire celle des quatre paramètres réels qui figurent dans son équation après division par $c + ic'$, par exemple], le point réel se déplace dans ces conditions et son déplacement est parfaitement déterminé par la loi de variation des coefficients de la droite imaginaire. Toutefois le déplacement du point réel ne précise nullement celui de la droite, puisque la représentation analytique d'une droite de cette nature s'effectue au moyen de quatre paramètres réels.

107. — DÉFINITION DES COURBES ORTHOPTIQUES. — La loi la plus simple de variation d'une droite imaginaire, dans le plan, consiste à faire dépendre les quatre coefficients réels de l'équation de cette droite d'un paramètre réel unique.

Les deux droites réelles, représentées par les équations respectives

$$a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c = 0 \qquad \text{et} \qquad a'\mathrm{X} + b'\mathrm{Y} + c' = 0 ,$$

qui déterminent par leur intersection le point réel de la droite imaginaire, enveloppent alors deux courbes réelles du plan; le point réel considéré décrit un certain lieu géométrique, réel lui aussi.

Plus particulièrement, supposons que l'équation de la droite imaginaire soit l'équation canonique

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \varpi = 0 ;$$

φ est ici un azimut complexe :

$$\varphi = t + iT ;$$

de même la distance ϖ de l'origine des coordonnées à cette droite imaginaire est un nombre imaginaire :

$$\varpi = p + iP ;$$

t est supposé variable et pris pour paramètre destiné à repérer la droite imaginaire; T, p, P sont, en d'autres termes, quatre fonctions données de la variable réelle t.

Si maintenant ce paramètre t prend un accroissement réel, tout se passe comme pour le cas d'une ∞^1 de droites réelles; le point d'intersection de deux droites voisines de paramètres t et $t + dt$ a une limite lorsque dt tend vers zéro et par suite les droites imaginaires considérées enveloppent une courbe imaginaire représentée par les fonctions précédentes T, p et P.

Cela étant, la tangente imaginaire considérée est douée d'un point réel, défini comme intersection des deux droites réelles représentées respectivement par les équations :

$$x \cos t + y \sin t = \frac{p}{\operatorname{ch} T} ,$$

$$- x \sin t + y \cos t = \frac{P}{\operatorname{sh} T} ;$$

celles-ci sont évidemment deux droites rectangulaires, qui enveloppent deux courbes réelles c_1 et c_2 simplement définies par les équations polaires tangentielles qui précèdent. Ainsi donc :

La courbe réelle, lieu des points réels situés sur les tangentes d'une courbe imaginaire, peut toujours être SIMPLEMENT *définie comme l'orthoptique de deux courbes réelles.*

Cette proposition rattache donc la notion de courbe orthoptique d'une courbe réelle à celle de la courbe réelle d'une certaine figure imaginaire.

108. — DROITES IMAGINAIRES DE L'ESPACE AYANT UN POINT RÉEL. — Alors que, sur toute droite imaginaire du plan, il existe toujours un point réel, il n'en est pas de même en géométrie spatiale.

Soit une droite imaginaire générale de l'espace. Elle part du point imaginaire μ de coordonnées

$$\xi = x_1 + ix_2 , \qquad \eta = y_1 + iy_2 , \qquad \zeta = z_1 + iz_2 ;$$

sa direction est définie par des coefficients

$$\alpha = a_1 + ia_2 , \qquad \beta = b_1 + ib_2 , \qquad \gamma = c_1 + ic_2 ;$$

les coordonnées d'un point quelconque de la droite sont :

$$\Xi = \xi + \lambda\alpha , \qquad \mathrm{H} = \eta + \lambda\beta , \qquad \mathrm{Z} = \zeta + \lambda\gamma ,$$

le paramètre λ étant l'imaginaire $l_1 + il_2$. Pour que ce point courant de la droite puisse être réel, il faut et il suffit que les parties purement imaginaires des expressions des trois coordonnées Ξ, H, Z soient simultanément nulles :

$$\begin{aligned} x_2 + l_1 a_2 + l_2 a_1 &= 0 , \\ y_2 + l_1 b_2 + l_2 b_1 &= 0 , \\ z_2 + l_1 c_2 + l_2 c_1 &= 0 ; \end{aligned}$$

il en résulte la condition suivante d'existence d'un point réel sur la droite imaginaire considérée :

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

l_1 et l_2 s'obtiennent alors par le système linéaire ci-dessus écrit et les coordonnées du point réel M sont alors les suivantes :

$$X = x_1 + a_1 l_1 - a_2 l_2 ,$$
$$Y = y_1 + b_1 l_1 - b_2 l_2 .$$
$$Z = z_1 + c_1 l_1 - c_2 l_2 .$$

109. — Définition de la développante d'une courbe plane réelle. — Parmi les courbes imaginaires de l'espace ordinaire, les plus remarquables sont certainement les lignes de longueur nulle. Leurs équations au moyen d'un paramètre réel t et d'une fonction $F(t)$ de cette variable réelle sont :

$$\begin{aligned} \xi &= \int (1 - t^2) F''' dt &&= (1 - t^2) F'' + 2tF' - 2F , \\ \eta &= i\int (1 + t^2) F''' dt &&= i\{(1 + t^2) F'' - 2tF' + 2F , \\ \zeta &= 2\int t F''' dt &&= 2tF'' - 2F' ; \end{aligned}$$

F', F'' et F''' désignent les dérivées première, seconde et troisième de cette fonction générale $F(t)$. Dans le cas actuel on a donc

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - t^2) F'' + 2tF' - 2F , & x_2 &= 0 , \\ y_1 &= 0 , & y_2 &= (1 + t^2) F'' - 2tF' + 2F , \\ z_1 &= 2tF'' - 2F' , & z_2 &= 0 ; \end{aligned}$$

les coefficients de direction de la tangente imaginaire à cette courbe imaginaire sont :

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 - t^2) F''' , & a_2 &= 0 . \\ b_1 &= 0 , & b_2 &= (1 + t^2) F''' , \\ c_1 &= 2tF''' , & c_2 &= 0 . \end{aligned}$$

La condition d'existence d'un point réel sur cette droite imaginaire est manifestement satisfaite quelle que soit la fonction $F(t)$; les valeurs de l_1 et de l_2 sont ici

$$l_1 = - \frac{y_2}{b_2} , \qquad l_2 = 0 ,$$

et les coordonnées du point réel sont par suite :

$$\begin{aligned} x &= 4 . \frac{tF' - F}{1 + t^2} , \\ y &= 0 , \\ z &= - 2 . \frac{(1 - t^2) F' + 2tF}{1 + t^2} . \end{aligned}$$

Ce point décrit une courbe réelle située dans le même plan que la courbe (c_1) décrite par le point réel de coordonnées x_1, y_1, z_1. Comme les diverses coordonnées introduites sont liées par la relation $dx_1^2 + dz_1^2 = dy_2^2$, y_2 n'est autre que l'abscisse curviligne s_1 de cette courbe réelle (c_1) et puisque l_1 est égal à $-\frac{y_2}{b_2} = -\frac{y_2}{y'_2}$, les coordonnées du point réel M deviennent :

$$x = \frac{1}{y'_2}(x_1 y'_2 - y_2 x'_1) = x_1 - s_1 \frac{dx_1}{ds_1} ,$$

$$y = 0 ,$$

$$z = \frac{1}{y'_1}(z_1 y'_2 - y_2 z'_1) = z_1 - s_1 \frac{dz_1}{ds_1} ;$$

ces dernières équations prouvent que ce point (x, y, z) décrit une développante par le fil de la courbe réelle (c_1).

En résumé : *toutes les tangentes d'une courbe minima de l'espace sont douées d'un point réel. La courbe lieu de ces points réels n'est autre qu'une développante de la courbe réelle plane* (c_1).

Comme la courbe plane (c_1), dont la ligne de longueur nulle peut être déduite au titre d'hélice particulière du cylindre de section droite (c_1), est absolument générale, cette proposition définit d'une manière inattendue la développante d'une courbe plane.

110. — Plus généralement, supposons que la droite imaginaire de l'espace appartienne à une ∞^1 développable : les douze paramètres $(x_1, \ldots, z_2)$, $(a_1, \ldots, c_2)$ sont des fonctions réelles de la seule variable réelle t liées par les relations :

$$a_1 = \frac{dx_1}{dt} , \qquad b_1 = \frac{dy_1}{dt} , \qquad c_1 = \frac{dz_1}{dt} ,$$

$$a_2 = \frac{dx_2}{dt} , \qquad b_2 = \frac{dy_2}{dt} , \qquad c_2 = \frac{dz_2}{dt} ;$$

la condition d'existence d'un point réel sur une telle tangente imaginaire à une courbe imaginaire est alors :

$$\begin{vmatrix} x_2 & \frac{dx_2}{dt} & \frac{dx_1}{dt} \\ y_2 & \frac{dy_2}{dt} & \frac{dy_1}{dt} \\ z_2 & \frac{dz_2}{dt} & \frac{dz_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 .$$

On se donnera, pour y satisfaire, la courbe gauche réelle (c_2) lieu du point M_2 de coordonnées x_2, y_2, z_2. P et Q étant deux fonctions de la variable réelle t, on posera :

$$dx_1 = \mathrm{P}d(\mathrm{Q}x_2) ,$$
$$dy_1 = \mathrm{P}d(\mathrm{Q}y_2) ,$$
$$dz_1 = \mathrm{P}d(\mathrm{Q}z_2) ;$$

la courbe (c_1) lieu du point (x_1, y_1, z_1) est alors définie, à une translation arbitraire près, par trois quadratures :

$$x_1 = \mathrm{PQ}x_2 - \int \mathrm{Q}x_2\, d\mathrm{P} ,$$
$$y_1 = \mathrm{PQ}y_2 - \int \mathrm{Q}y_2\, d\mathrm{P} ,$$
$$z_1 = \mathrm{PQ}z_2 - \int \mathrm{Q}z_2\, d\mathrm{P} ;$$

si, par exception, la courbe (c_2) est un axe de coordonnées, l'axe Oz par exemple, la condition est satisfaite quelle que soit la courbe (c_1), puisque x_2, y_2, x'_2 et y'_2 sont nuls; l_2 est nul et l_1 prend la valeur $-\frac{z_2}{z'_2}$, de sorte que les coordonnées du point réel M sont alors :

$$x = x_1 - z_2\frac{dx_1}{dz_2} , \qquad y = y_1 - z_2\frac{dy_1}{dz_2} , \qquad z = z_1 - z_2\frac{dz_1}{dz_2} ;$$

la courbe (c_1) reste indéterminée ; le point M est un point de la tangente en M_1 à cette courbe réelle (c_1), à une distance $M_1M = z_2\frac{dz_1}{dz_2}$ du point M_1 de contact de la tangente. En prenant plus particulièrement z_2 proportionnel à l'abscisse curviligne s_1 de la courbe (c_1), $z_2 = ks_1$, la courbe lieu de M est une développante par le fil de la courbe (c_1). Ce résultat constitue par suite une généralisation de celui qui a été indiqué au paragraphe précédent, à propos des courbes de longueur nulle (k est alors égal à l'unité et z_1 est nul, aux notations près).

* * *

111. — Je n'insiste pas sur cette question qui ne présente qu'un intérêt de curiosité. Il me suffira de dire que les remarques qui précèdent ne sont pas les seules qu'il est possible de faire dans la considération des éléments de certaines figures imaginaires du plan ou de l'espace. C'est ainsi que des transformations rationnelles bien connues peuvent être rattachées à ces mêmes considérations et que l'étude des droites de l'espace qui sont douées d'un point réel met en évidence certains systèmes rectilignes, congruences ou complexes, bien connus par ailleurs.

Paris, le 1er février 1918.