1. — Le problème de l'approximation.

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE[1]

PAR

C. de la VALLÉE POUSSIN
Professeur à l'Université de Louvain.

---

1. — Le problème de l'approximation.

L'approximation des fonctions de variables réelles a fait l'objet de recherches récentes (1898-1913). J'en ai suivi les dernières avec d'autant plus d'intérêt que j'avais contribué dans une certaine mesure à les provoquer. Je me propose de donner ici une idée sommaire de cette nouvelle théorie. J'espère qu'elle suffira pour faire saisir les problèmes les plus caractéristiques qui se posent et la nature des procédés mis en œuvre pour les résoudre. Je me guiderai dans mon exposé sur l'ordre historique des découvertes; mais je me bornerai aux fonctions d'une seule variable, faute de temps. On se gardera d'en conclure que la théorie des fonctions de plusieurs variables manque actuellement d'intérêt ou de résultats.

Je définis d'abord la question qui va nous occuper.

Il s'agit d'exprimer une fonction sous forme finie avec plus ou moins d'approximation. Mais les recherches actuelles ne portent que sur deux modes de représentation approchée : *La représentation par polynômes* et alors la représentation se fait dans un intervalle (a, b), où l'on suppose la

---

[1] Conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Fribourg le 24 février 1918.
Les numéros dans le texte renvoient à l'index bibliographique à la fin de l'article.

fonction continue; *la représentation trigonométrique*, auquel cas la fonction est supposée continue et périodique de période 2π, la représentation s'étend alors à toutes les valeurs réelles de x.

Cette représentation trigonométrique est donnée par une expression d'un certain ordre fini n, c'est-à-dire par une suite limitée de la forme

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \\ &\quad + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx \ , \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, par un polynôme de degré n en $\sin x$ et $\cos x$. Il y a lieu d'observer que si l'expression est paire, elle se réduit, les sinus disparaissant, à un polynôme de degré n en $\cos x$.

Soient $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et $P_n(x)$ un polynôme de degré n d'ailleurs quelconque. Ce polynôme doit être considéré comme une expression approchée de $f(x)$. Le maximum dans (a, b) de la différence absolue

$$|f(x) - P_n|$$

est *l'approximation* fournie par P_n. Ce polynôme est d'autant meilleur comme expression approchée qu'il fournit une approximation plus petite. Si l'on considérait une fonction périodique et sa représentation trigonométrique, l'approximation se définirait de la même manière.

Le *problème de l'approximation* consiste à former une expression de l'un ou de l'autre de ces deux types *dont l'approximation soit aussi petite qu'on le veut.* Le problème est possible dans les deux cas. Il y a là deux *théorèmes d'existence,* tous deux dus à Weierstrass (1885), et qui ont été le point de départ de la théorie qui nous occupe. Il y a lieu de nous y arrêter quelques instants.

2. — Les deux théorèmes d'existence de Weierstrass.

Weierstrass a démontré les deux théorèmes suivants (1):

I. *Toute fonction continue dans un intervalle* (a, b) *peut*