# LES DEUX SUITES FIBONACCIENNES FONDAMENTALES $(u_n)(v_n)$.

Autor(en): **Laisant, C.-A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515709

implicitement lorsque, guidés par notre intuition, nous voulons maintenir la notion cantorienne.

L'ensemble X ainsi défini existe-t-il? La réponse est négative, car l'interprétation de la phrase P imposée par notre attitude ne saurait figurer parmi les interprétations acceptables de P'; elle est conditionnée par ces interprétations particulières, mais elle ne se confond avec aucune d'elles. L'ensemble X n'existe pas; la formation de ses éléments ne comporte pas de borne, car tout ensemble d'ensembles ordinaires, pourvu qu'il existe, fait partie de X.

L'attitude que je viens de définir est celle que j'ai adoptée implicitement dans ma première note sur les antinomies de Russell et de Burali-Forti [1]. Dans ces antinomies, les phrases n'interviennent pas directement, mais si l'on veut préciser, il faut bien en tenir compte.

---

# LES DEUX SUITES FIBONACCIENNES FONDAMENTALES $(u_n)(v_n)$.

## *Tables de leurs termes jusqu'à* n = 120

PAR

C.-A. LAISANT (Paris).

---

1. — La suite de Fibonacci (1 1 2 3 5 8 ...) tire son origine de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$. Si $\alpha$, $\beta$ sont les racines de cette équation, la suite est formée par les valeurs successives de la fonction $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, qui est égale à l'unité pour $n = 1$ et $n = 2$. Les termes successifs sont obtenus par la relation de récurrence fondamentale $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

[1] *Ens. math.*, t. 19, 1917, p. 37 à 52.

2. — Si, au lieu de $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, nous considérons la fonction $\alpha^n + \beta^n = v_n$, nous avons $v_1 = \alpha + \beta = 1$, et $v_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 2 = 3$, car $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$. Il est d'ailleurs évident que les termes successifs obéissent à la même loi de récurrence $v_{n+2} = v_n + v_{n+1}$.

Cette seconde suite Fibonaccienne est donc (1 3 4 7 11 18...).

3. — On peut facilement constater que $u_{5n}$ est toujours un multiple de 5, que $v_n$ n'est jamais un multiple de 5, que $u_{12n}$ est un multiple de 9, et qu'il en est de même pour $v_{12n+6}$.

On a aussi la relation évidente $u_{2n} = u_n v_n$, et les identités $v_n = u_{n-1} + u_{n+1}$, $5u_n = v_{n-1} + v_{n+1}$ qui se vérifient sur les plus petites valeurs de $n$, et se généralisent par voie de récurrence.

Remarquons enfin que $\frac{v_n}{u_n}$ donne des valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{5}$, à mesure que $n$ augmente.

4. — Les deux suites $(u_n)(v_n)$ peuvent être prolongées dans le sens négatif, c'est-à-dire pour les indices 0, $-1$, $-2$, $-3$, ... On met ainsi en évidence les propriétés suivantes :

Si $n$ est impair,

$$u_{-n} = u_n \qquad v_{-n} = -v_n .$$

Si $n$ est pair,

$$u_{-n} = -u_n \qquad v_{-n} = v_n .$$

Les tables qui suivent, comprenant les valeurs numériques de $u_n$, $v_n$, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 120$, permettront de vérifier les relations que nous venons d'indiquer. On remarquera la rapide progression des termes ; $u_{120}$ est un nombre de 25 chiffres et $v_{120}$ un nombre de 26 chiffres.

TABLES DES VALEURS $u_n$, $v_n$.

| $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 4 |
| 4 | 3 | 7 |
| 5 | 5 | 11 |

| $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
|---|---|---|
| 6 | 8 | 18 |
| 7 | 13 | 29 |
| 8 | 21 | 47 |
| 9 | 34 | 76 |
| 10 | 55 | 123 |
| 11 | 89 | 199 |
| 12 | 144 | 322 |
| 13 | 233 | 521 |
| 14 | 377 | 843 |
| 15 | 610 | 1364 |
| 16 | 987 | 2207 |
| 17 | 1597 | 3571 |
| 18 | 2584 | 5778 |
| 19 | 4181 | 9349 |
| 20 | 6765 | 15127 |
| 21 | 10946 | 24476 |
| 22 | 17711 | 39603 |
| 23 | 28657 | 64079 |
| 24 | 46368 | 103682 |
| 25 | 75025 | 167761 |
| 26 | 121393 | 271443 |
| 27 | 196418 | 439204 |
| 28 | 317811 | 710647 |
| 29 | 514229 | 1149851 |
| 30 | 832040 | 1860498 |
| 31 | 1346269 | 3010349 |
| 32 | 2178309 | 4870847 |
| 33 | 3524578 | 7881196 |
| 34 | 5702887 | 12752043 |
| 35 | 9227465 | 20633239 |
| 36 | 14930352 | 33385282 |
| 37 | 24157817 | 54018521 |
| 38 | 39088169 | 87403803 |
| 39 | 63245986 | 141422324 |
| 40 | 102334155 | 228826127 |
| 41 | 165580141 | 370248451 |
| 42 | 267914296 | 599074578 |
| 43 | 433494437 | 969323029 |
| 44 | 701408733 | 1568397607 |
| 45 | 1134903170 | 2537720636 |
| 46 | 1836311903 | 4106118243 |
| 47 | 2971215073 | 6643838879 |
| 48 | 4807526976 | 10749957122 |
| 49 | 7778742049 | 17393796001 |

| $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
|---|---|---|
| 50 | 12586269025 | 28143753123 |
| 51 | 20365011074 | 45537549124 |
| 52 | 32951280099 | 73681302247 |
| 53 | 53316291173 | 119218851371 |
| 54 | 86267571272 | 192900153618 |
| 55 | 139583862445 | 312119004989 |
| 56 | 225851433717 | 505019158607 |
| 57 | 365435296162 | 817138163596 |
| 58 | 591286729879 | 1322157322203 |
| 59 | 956722026041 | 2139295485799 |
| 60 | 1548008755920 | 3461452808002 |
| 61 | 2504730781961 | 5600748293801 |
| 62 | 4052739537881 | 9062201101803 |
| 63 | 6557470319842 | 14662949395604 |
| 64 | 10610209857723 | 23725150497407 |
| 65 | 17167680177565 | 38388099893011 |
| 66 | 27777890035288 | 62113250390418 |
| 67 | 44945570212853 | 100501350283429 |
| 68 | 72723460248141 | 162614600673847 |
| 69 | 117669030460994 | 263115950957276 |
| 70 | 190392490709135 | 425730551631123 |
| 71 | 308061521170129 | 688846502588399 |
| 72 | 498454011879264 | 1114577054219522 |
| 73 | 806515533049393 | 1803423556807921 |
| 74 | 1304969544928657 | 2918000611027443 |
| 75 | 2111485077978050 | 4721424167835364 |
| 76 | 3416454622906707 | 7639424778862807 |
| 77 | 5527939700884757 | 12360848946698171 |
| 78 | 8944394323791464 | 20000273725560978 |
| 79 | 14472334024676221 | 32361122672259149 |
| 80 | 23416728348467685 | 52361396397820127 |
| 81 | 37889062373143906 | 84722519070079276 |
| 82 | 61305790721611591 | 137083915467899403 |
| 83 | 99194853094755497 | 221806434537978679 |
| 84 | 160500643816367088 | 358890350005878082 |
| 85 | 259695496911122585 | 580696784543856761 |
| 86 | 420196140727489673 | 939587134549734843 |
| 87 | 679891637638612258 | 1520283919093591604 |
| 88 | 1100087778366101931 | 2459871053643326447 |
| 89 | 1779979416004714189 | 3980154972736918051 |
| 90 | 2880067194370816120 | 6440026026380244498 |
| 91 | 4660046610375530309 | 10420180999117162549 |
| 92 | 7540113804746346429 | 16860207025497407047 |
| 93 | 12200160415121876738 | 27280388024614569596 |

| $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
|---|---|---|
| 94 | 1974027421986822316 7 | 4414059505011197664 3 |
| 95 | 3194043463499009990 5 | 7142098307472654623 9 |
| 96 | 5168070885485832307 2 | 11556157812483852288 2 |
| 97 | 8362114348984842297 7 | 18698256119956506912 1 |
| 98 | 13530185234470674604 9 | 30254413932440359200 3 |
| 99 | 21892299583455516902 6 | 48952670052396866112 4 |
| 100 | 35422484817926191507 5 | 79207083984837225312 7 |
| 101 | 57314784401381708410 1 | 128159754037234091425 1 |
| 102 | 92737269219307899917 6 | 207366838022071316737 8 |
| 103 | 150052053620689608327 7 | 335526592059305408162 9 |
| 104 | 242789322839997508245 3 | 542893430081376724900 7 |
| 105 | 392841376460687116573 0 | 878420022140682133063 6 |
| 106 | 635630699300684624818 3 | 1421313452222058857964 3 |
| 107 | 1028472075761371741391 3 | 2299733474362740991027 9 |
| 108 | 1664102775062056366209 6 | 3721046926584799848992 2 |
| 109 | 2692574850823428107600 9 | 6020780400947540840020 1 |
| 110 | 4356677625885484473810 5 | 9741827327532340689012 3 |
| 111 | 7049252476708912581411 4 | 15762607728479881529032 4 |
| 112 | 11405930102594397055221 9 | 25504435056012222218044 7 |
| 113 | 18455182579303309636633 3 | 41267042784492103747077 1 |
| 114 | 29861112681897706691855 2 | 66771477840504325965121 8 |
| 115 | 48316295261201016328488 5 | 108038520624996429712198 9 |
| 116 | 78177407943098723020343 7 | 174809998465500755677320 7 |
| 117 | 126493703204299739348832 2 | 282848519090497185389519 6 |
| 118 | 204671111147398462369175 9 | 457658517555997941066840 3 |
| 119 | 331164814351698201718008 1 | 740507036646495126456359 9 |
| 120 | 535835925499096664087184 0 | 1198165554202493067523200 2 |

Janvier 1920.