

LA NOTION D'ÉQUIVALENCE DANS LA THÉORIE DES GROUPES

Autor(en): **Miller, G. A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515720>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LA NOTION D'ÉQUIVALENCE DANS LA THÉORIE DES GROUPES

PAR

G. A. MILLER (Urbana, Ill.).

Une des notions les plus embarrassantes de la théorie des groupes est celle d'équivalence. Dans l'énumération des groupes de substitutions, par exemple, deux groupes tels que l'un d'eux se transforme dans l'autre au moyen d'une substitution sont considérés comme équivalents, et de toute la série infinie des groupes de substitutions pouvant se transformer les uns dans les autres par simple substitution, un seul sera compris dans l'énumération. D'un autre côté, quand deux tels groupes apparaissent comme sous-groupes du même groupe, ils sont dits être des groupes distincts.

De même en énumérant des groupes abstraits, deux groupes simplement isomorphes sont considérés comme équivalents, et l'un des deux seulement est compris dans l'énumération, alors que ces deux groupes sont considérés distincts quand ils apparaissent comme sous-groupes du même groupe abstrait. Nous avons ici non seulement des critères différents d'équivalence selon que nous employons les groupes abstraits ou les groupes de substitutions, mais même dans la même branche de la théorie des groupes, deux groupes seront considérés tantôt comme équivalents tantôt comme non équivalents.

Les difficultés qui s'attachent à l'usage des diverses notions d'équivalence dans la théorie des groupes peuvent être illustrées par les énoncés d'apparence contradictoire suivants : Il y a un et un seul groupe cyclique de chaque ordre donné,

mais tout groupe non-cyclique contient au moins deux sous-groupes cycliques de même ordre. Dans le premier de ces énoncés, deux groupes sont regardés comme équivalents chaque fois qu'il est possible d'établir un isomorphisme simple entre les deux opérateurs, tandis que dans le second, deux groupes sont considérés comme équivalents seulement lorsqu'ils se composent des mêmes opérateurs.

Ces observations soulèvent la question suivante : existe-t-il, dans la théorie des groupes, des groupes absolument équivalents ou des opérateurs absolument équivalents ? Considérant que l'identité est le seul opérateur ou sous-groupe qui conserve les mêmes propriétés par rapport aux opérateurs de tous les groupes, on peut dire : *Il y a un et un seul groupe et un et un seul opérateur qui conserve les mêmes propriétés dans toutes les considérations de la théorie des groupes dans lesquels il apparaît : c'est l'identité.* D'où l'identité d'un groupe peut être considérée comme absolument équivalente à l'identité de tout autre groupe.

Un opérateur quelconque d'un ordre donné $n > 1$ peut être commun à deux groupes et avoir des relations très différentes avec les autres opérateurs de ces mêmes groupes. Ceci illustre le fait qu'à l'exception de l'identité un opérateur de groupe n'est pas défini en lui-même. Il n'est pas non plus complètement défini par les groupes connus dans lesquels il serait contenu. La manière dont il se comporte dans ces groupes ne détermine pas celle qu'il aura par rapport à d'autres groupes dans lesquels il peut apparaître. Les mêmes remarques s'appliquent également à deux sous-groupes simplement isomorphes.

En particulier, l'énoncé général d'après lequel il existe un et un seul groupe cyclique d'un ordre donné n , énoncé qui implique que tous les groupes cycliques de cet ordre sont équivalents, représente les faits d'une manière très inadéquate. Il serait tout aussi exact de dire qu'il existe un et un seul opérateur d'ordre n . Il paraît indiqué de considérer les groupes et les opérateurs de groupes comme des éléments qui ne peuvent être complètement définis. Tout ce que l'on en peut savoir c'est leur manière d'être dans certains groupes,

y compris les groupes déterminés par eux-mêmes. En partant de ce point de vue, il est impossible d'établir l'équivalence de deux groupes, à moins que ce ne soit l'identité, et l'habitude de considérer deux groupes qui sont simplement isomorphes comme équivalents, est sujette à caution.

Dans la théorie élémentaire des groupes il est fait usage implicitement ou explicitement d'au moins sept types différents d'équivalence. Il y a peu de risques d'erreur lorsque l'équivalence est explicitement restreinte comme c'est le cas lorsque les opérateurs d'un groupe sont dits équivalents en ce qui concerne un certain sous-groupe, pris comme module, ou en ce qui concerne deux sous-groupes pris comme double module. C'est un fait évident que ces types d'équivalence n'impliquent pas des propriétés d'identité puisque deux opérateurs qui sont équivalents en ce qui concerne un certain module peuvent être d'ordres différents. L'équivalence par rapport à un module ou un double module n'implique donc pas l'équivalence par rapport au simple isomorphisme; de même celui-ci n'implique pas celui-là.

Jusqu'ici nous avons noté cinq types d'équivalences en usage dans la théorie des groupes, soit l'équivalence substitution, l'équivalence en ce qui concerne l'isomorphisme simple, l'équivalence absolue et deux types d'équivalence modulaire. Les deux premiers de ces types ne sont généralement pas explicitement définis et sont par conséquent susceptibles de devenir une source d'imprécision pour le lecteur mathématique. Lorsqu'on se réfère aux énumérations de groupes de substitution telles que celles inaugurées par A.-L. Cauchy en 1845, il est d'usage d'indiquer seulement qu'il y a deux groupes de substitution pour 3 lettres, 7 pour 4 lettres, etc. Il serait plus précis de dire que si tous les groupes de substitution qui peuvent se transformer les uns dans les autres sont regardés comme équivalents, alors il y a deux et seulement deux ensembles pour trois lettres, etc.

D'où il résulte que l'équivalence de substitution implique l'équivalence d'isomorphisme simple, mais que l'équivalence d'isomorphisme simple n'implique pas l'équivalence de substitution. Même la liste des groupes de substitution possibles

pour 4 lettres contient déjà 2 groupes simplement isomorphes. Il faut donc se souvenir que quand un auteur établit par exemple qu'il y a 5 et seulement 5 groupes d'ordre 8 et qu'il y a 7 et seulement 7 groupes de degré 4, il admet des critères très différents par la détermination de l'équivalence dans les deux cas. Ce qui est encore plus important c'est le fait que ni l'un ni l'autre de ces critères ne se rapporte à l'équivalence absolue. Les systèmes infinis de groupes qui ont séparément un seul représentant dans une telle énumération sont en fait indéfinis en ce qui concerne les propriétés relatives.

Les deux autres types d'équivalence de la théorie des groupes que nous avons déjà indiqués concernent des opérateurs des sous-groupes du groupe G qui se correspondent soit au groupe d'isomorphisme de G , soit à son groupe d'isomorphisme intérieur. Ces types d'équivalence sont généralement connus sous le nom de conjugués et sont moins sujets à des erreurs de conception que les autres dont nous avons parlé précédemment. Le dernier concerne uniquement les groupes non-abéliens, mais il est d'une importance fondamentale dans l'étude de ces groupes.

Le principal objet de cette Note était d'attirer l'attention sur la grande différence entre les critères d'équivalence employés dans la théorie des groupes et, en ce qui concerne la nature des opérateurs ou sous-groupes qui sont classés ensemble comme équivalents, sur la faible part de connaissance impliquée par cette classification. Un groupe exige des lois rigides en ce qui concerne les combinaisons de ses propres sous-groupes ou opérateurs, mais ne met point de restriction à ces mêmes sous-groupes ou opérateurs lorsqu'ils sont combinés avec des éléments ne faisant pas partie du groupe.
